



“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材配套参考书

机械原理 (第4版)

学习指导与习题解答

哈尔滨工业大学 编

于红英 主编

中国教育出版传媒集团
高等教育出版社



“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材配套参考书

机械原理 (第4版)

学习指导与习题解答

哈尔滨工业大学 编

于红英 主编

中国教育出版传媒集团

高等教育出版社·北京

内容提要

本书是根据《机械原理课程教学基本要求》编写的。本书可与于红英等主编的《机械原理》(第4版)配套使用,体系与主教材一致,概括了机械原理课程的重点、难点,在此基础上对主教材每一章的课后作业题进行了详细求解。通过对解题过程的详细讲解,使读者更准确、深入地理解和灵活地运用机械原理课程的基本原理与基本方法。

本书中连杆机构的分析、设计及凸轮机构的设计采用了解析法。

本书可作为高等学校机械类专业学习机械原理课程的辅助教材,也可供相关专业的师生和工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

机械原理(第4版)学习指导与习题解答 / 哈尔滨工业大学编; 于红英主编. --北京: 高等教育出版社, 2024. 9. -- ISBN 978-7-04-062756-5

I. TH111

中国国家版本馆 CIP 数据核字第 2024AG8686 号

Jixie Yuanli(Di-si ban) Xuexi Zhidao yu Xiti Jieda

策划编辑 宋 晓 责任编辑 龙琳琳 封面设计 张申申 贺雅馨 版式设计 杜微言
责任绘图 杨伟露 责任校对 刁丽丽 责任印制 耿 轩

出版发行	高等教育出版社	网 址	http://www.hep.edu.cn
社 址	北京市西城区德外大街4号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.hepmall.com.cn
印 刷	河北信瑞彩印刷有限公司		http://www.hepmall.com
开 本	787mm×960mm 1/16		http://www.hepmall.cn
印 张	19.75	版 次	2024年9月第1版
字 数	360千字	印 次	2024年9月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定 价	35.00元
咨询电话	400-810-0598		

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换

版权所有 侵权必究

物 料 号 62756-00

前言

本书可与哈尔滨工业大学于红英、邓宗全、丁刚主编的“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材、工业和信息化部“十四五”规划教材《机械原理》(第4版)配套使用,体系及书中习题与主教材完全一致,以便读者更好地掌握机械原理课程的内容。

机械原理是高等学校机械工程类各本科专业的主干课程,是一门研究机械运动学和动力学基本理论的课程,其中一些基本原理、基本方法往往较难掌握。为了帮助读者更快更好地掌握机械原理课程的基本原理与基本方法,本书概括了机械原理课程每一章的重点、难点,在此基础上,对主教材每一章的作业题进行了详细求解。通过对解题过程的详细讲解,使读者能更准确、深入地理解和灵活地运用机械原理课程的基本原理与基本方法。

考虑到应用计算机技术对机构进行分析和设计是机构学发展的方向,本书中连杆机构的运动分析和不考虑摩擦时力分析的习题均采用“基本杆组法”(解析法的一种)求解,连杆机构设计、凸轮机构设计则采用了解析法。连杆机构的解析法运动分析和力分析以及连杆机构、凸轮机构的解析法设计,为应用计算机对机构进行运动、力分析和设计提供了极大方便。

本书由哈尔滨工业大学于红英主编。

哈尔滨工业大学唐德威教授精心审阅了本书,提出了许多宝贵意见,在此表示衷心感谢。

由于水平所限,书中难免存在不妥之处,诚望广大读者批评指正。

作者邮箱:mcadyhy@hit.edu.cn。

编者

2024年4月

设计 杜微言

du.cn
om.cn
all.com.cn
all.com
all.cn

版
次印刷

目 录

第一章 绪论	1
1.1 基本要求	1
1.2 重点及难点解析	1
第二章 机构的结构分析	2
2.1 基本要求	2
2.2 重点及难点解析	2
2.3 典型例题分析及解题技巧	5
2.4 习题解答	7
第三章 平面机构的运动分析	20
3.1 基本要求	20
3.2 重点及难点解析	20
3.3 典型例题分析及解题技巧	21
3.4 习题解答	24
第四章 平面机构的力分析和机械效率	76
4.1 基本要求	76
4.2 重点及难点解析	76
4.3 典型例题分析及解题技巧	78
4.4 习题解答	82
第五章 平面连杆机构及其设计	125
5.1 基本要求	125
5.2 重点及难点解析	125
5.3 典型例题分析及解题技巧	127
5.4 习题解答	129

第六章 凸轮机构及其设计	153
6.1 基本要求	153
6.2 重点及难点解析	153
6.3 典型例题分析及解题技巧	155
6.4 习题解答	160
第七章 齿轮机构及其设计	172
7.1 基本要求	172
7.2 重点及难点解析	172
7.3 典型例题分析及解题技巧	175
7.4 习题解答	179
第八章 轮系及其设计	210
8.1 基本要求	210
8.2 重点及难点解析	210
8.3 典型例题分析及解题技巧	213
8.4 习题解答	216
第九章 其他常用机构	236
9.1 基本要求	236
9.2 重点及难点解析	236
9.3 典型例题分析及解题技巧	239
9.4 习题解答	241
第十章 机械的运转及其速度波动的调节	248
10.1 基本要求	248
10.2 重点及难点解析	248
10.3 典型例题分析及解题技巧	250
10.4 习题解答	256
第十一章 机械的平衡	272
11.1 基本要求	272
11.2 重点及难点解析	272

11.3 典型例题分析及解题技巧	273
11.4 习题解答	279
参考文献	306

1.1 基本要求

本章主要掌握课程的研究对象和内容,机器、机构与机械的概念。

1.2 重点及难点解析

本章重点及难点是掌握并区分机器、机构与机械的概念及掌握机器的组成部分。

1. 机械

机械是机器与机构的总称。

2. 机器

机器是一种人为进行实物组合的具有确定机械运动的装置,它用来完成有用功、转换能量或处理信息,以代替或减轻人类的劳动与拓展劳动能力。一台完整的机器具有四个组成部分,即原动机、传动机构、执行机构和控制系统。

3. 机构

机构是一个具有相对机械运动的构件系统,或称它是用来传递与变换运动和动力的可动装置。

2.1 基本要求

1. 明确构件、运动副和运动链等基本概念,掌握运动副的常用类型和特点及机构运动简图的绘制方法;
2. 掌握平面机构自由度的计算方法,正确识别机构中存在的复合铰链、局部自由度和虚约束,并做出正确处理;
3. 掌握机构的组成原理和用基本杆组法进行机构结构分析的方法;
4. 了解平面机构的高副低代。

2.2 重点及难点解析

2.2.1 本章重点

1. 机构组成的基本概念及机构具有确定运动的条件

(1) 构件

构件是机构运动的单元体,是组成机构的基本要素,是研究机构运动时所独有的名词。构件可以是一个零件,也可以是由若干个零件固连在一起组成的一个独立运动的整体。

(2) 运动副

运动副是两构件直接接触而又能产生一定相对运动的可动连接,是组成机构的又一基本要素。通常把两构件参与接触而构成运动副的部分称为运动副元素。运动副可按其接触形式分为高副(点或线接触的运动副)和低副(面接触的运动副);又可按其所能产生相对运动的形式分为转动副、移动副、螺旋副及球面副等。由于两构件构成运动副之后,它们之间能产生何种相对运动取决于该运动副所引入约束的情况,所以运动副常根据其所引入约束的数目分类为Ⅰ级副、Ⅱ级副、Ⅲ级副、Ⅳ级副、Ⅴ级副。

(3) 运动链

运动链是两个或两个以上构件通过运动副连接而构成的相对可动的系统,

如果运动链中构件构成首末封闭的系统,则称为闭式链,否则称为开式链。

(4) 机构

如果将运动链中的一个构件固定作为参考系,则这种运动链就称为机构。从其功能来理解机构是一种用来传递运动和力的可动装置;从机器的特征来看,机构是具有相对运动规律的构件组合;而从机构组成来看,机构是具有固定构件的运动链。机构中的固定构件称为机架,按给定的已知运动规律独立运动的构件称为主动件,其余活动构件称为从动件。从动件的运动规律取决于主动件的运动规律和机构的结构。

(5) 机构的自由度

机构的自由度是机构具有确定位置时所必须给定的独立运动参数数目。在机构中,通常是使其主动件按给定的某一运动规律运动来引入独立运动参数,所以可以认为机构的自由度也就是机构应当具有的主动件数目。机构的自由度 F 、机构主动件的数目和机构的运动有以下密切关系:

- 1) 若机构的自由度数 $F \leq 0$,则机构不能动;
- 2) 若机构自由度数 $F > 0$ 且与主动件数相等,则机构各构件间的相对运动是确定的,因此机构具有确定运动的条件是机构的主动件数等于机构的自由度数;
- 3) 若机构自由度数 $F > 0$,而主动件数 $< F$,则构件间的运动是不确定的;
- 4) 若机构自由度数 $F > 0$,而主动件数 $> F$,则构件间不能运动或产生破坏。

2. 机构运动简图的绘制

为了便于研究机构的运动,可以撇开构件、运动副的外形和具体构造,而只用简单的线条和符号代表构件和运动副,并按比例定出各运动副的位置,表示机构的组成和传动情况,这样绘制出的能够准确表达机构运动特性的简明图形称为机构运动简图。机构运动简图与原机构具有完全相同的运动特性,可以根据机构运动简图对机构进行运动分析和动力分析。有时,只是为了表明机构的运动状态或各构件的相互关系,也可以不按比例绘制运动简图,通常把这样的简图称为机构示意图。

绘制机构运动简图时应注意以下问题:

- 1) 必须搞清机构的实际结构和运动情况。首先确定机构的主动件和执行件,两者之间为传动部分,由此确定组成机构的所有构件,然后确定构件间运动副的类型。
- 2) 恰当选择投影面。一般选择与多数构件的运动平面相平行的面为投影面,必要时也可以就机械的不同部分选择两个或两个以上的投影面,然后将其展开到同一平面上。
- 3) 选择适当的比例尺。根据机构的运动尺寸定出各运动副之间的相对位

置,然后用规定的符号画出各类运动副,并将同一构件上的运动副符号用简单线条连接起来,这样便可绘制出机构运动简图。绘制机构运动简图要以正确、简单、清晰为原则。

3. 平面机构自由度的计算

平面机构自由度的计算公式为

$$F = 3n - 2P_L - P_H$$

式中: n 为机构中活动构件数目; P_L 为机构中低副的数目; P_H 为机构中高副的数目。

在计算机构自由度时,应特别注意处理好以下三种情况。

(1) 复合铰链

由两个以上构件在同一处构成的重合转动副称为复合铰链,其产生的原因就是运动简图“简”的结果。由 m 个构件汇集而成的复合铰链应当包含 $m-1$ 个转动副。

(2) 局部自由度

在一些机构中某些构件所产生的局部运动不影响整个机构运动,由此带来的自由度称为局部自由度。在计算机构自由度时,局部自由度应当舍弃不计,通常将产生局部自由度的构件和与其相连的构件视为焊成一体,然后进行计算。对于平面机构来讲,可以认为只有滚子作为活动构件的情况下存在局部自由度。

(3) 虚约束

在机构中,有些运动副的约束所起的限制作用可能是其他运动副所起的限制作用的重复,这种不起独立限制作用的约束称为虚约束。计算机构自由度时,应先将产生虚约束的构件和运动副去掉,然后再进行计算。任何一个虚约束都是有前提条件的,没有前提条件的虚约束是不存在的。这些前提条件往往都是一些结构尺寸或加工精度等方面的要求,有时以文字说明形式给出,有时隐含在机构运动简图中,因此当题目中出现额外的条件时就要格外注意是否存在虚约束。

2.2.2 难点解析

本章难点是机构自由度计算中虚约束的识别和处理问题。

常见的虚约束有以下几种情况:

- 1) 当两构件组成多个移动副,且其导路互相平行或重合时,只有一个移动副起约束作用,其余都是虚约束。
- 2) 当两构件构成多个转动副,且轴动副轴线互相重合时,只有一个转动副

起作用,其余转动副都是虚约束。

以上两种情况可以总结成一句话,就是两个构件只能组成一个运动副,多余的运动副都是虚约束。

3) 如果机构中两个活动构件上某两点的距离始终保持不变,此时若用具有两个转动副的附加构件连接这两个点,则将会引入一个虚约束。必须注意,为使两动点间的距离始终保持不变,除要求它们具有相同的轨迹之外,还必须要求它们有相同的运动规律。

4) 机构中对运动起重复限制作用的对称部分往往会引入虚约束。

2.3 典型例题分析及解题技巧

例 2-1 如图 2-1a 所示,已知: $DE=FG=HI$, 且相互平行; $DF=EG$, 且相互平行; $DH=EI$, 且相互平行。计算此机构的自由度 (若存在局部自由度、复合铰链、虚约束, 请指出)。

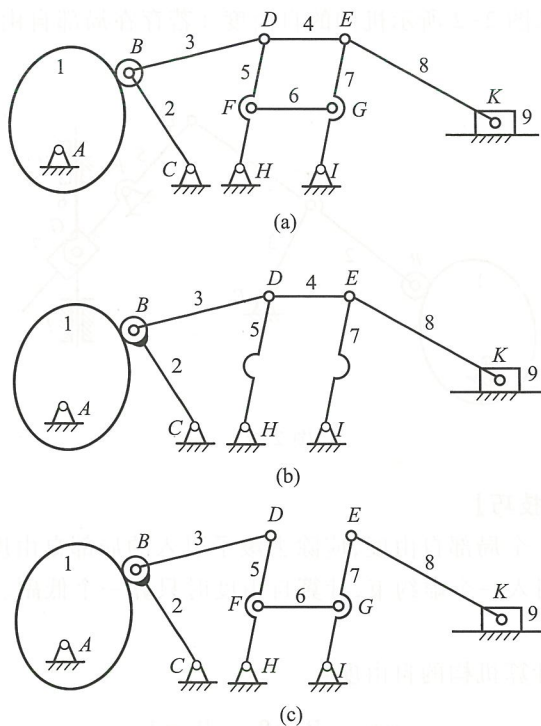


图 2-1

【解题思路及技巧】

这是一道计算机构自由度的典型例题。由于 $DFHIGE$ 的特殊几何关系, 构件 FG 的存在只是为了改善平行四边形 $DHIE$ 的受力状况, 对整个机构的运动不起约束作用, 故构件 FG 及其两端的转动副所引入的约束为虚约束。 D 、 E 两处为复合铰链。滚子绕自身几何中心 B 的转动自由度为局部自由度。在计算机构自由度时, 去除构件 FG 及其带入的约束, 去除滚子引入的局部自由度并将其与构件 2 固连, 得到图 2-1b。另外, 本题也可以看成构件 DE 及其两端的转动副是虚约束, 去除构件 DE 及其带入的约束, 此时 D 、 E 两处不是复合铰链, 去除滚子引入的局部自由度并将其与构件 2 固连, 得到图 2-1c。由此可见, 在进行机构自由度计算时, 判断虚约束是至关重要的, 它决定复合铰链的存在与否。

【解题过程】

根据图 2-1b 和图 2-1c 计算机构的自由度:

$$n = 8, \quad P_L = 11, \quad P_H = 1$$

$$F = 3n - 2P_L - P_H = 3 \times 8 - 2 \times 11 - 1 = 1$$

例 2-2 计算图 2-2 所示机构的自由度 (若存在局部自由度、复合铰链、虚约束, 请指出)。

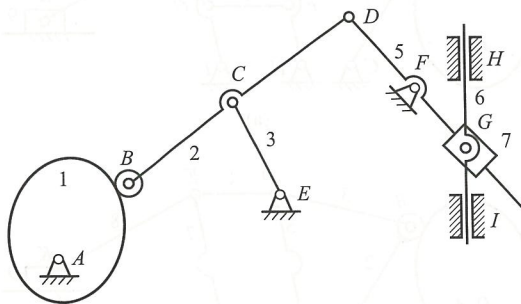


图 2-2

【解题思路及技巧】

滚子 B 引入一个局部自由度, 应除去滚子引入的局部自由度, 即将其与构件 2 固连; H 、 I 之一引入一个虚约束, 计算自由度时只算一个低副。

【解题过程】

根据图 2-2 计算机构的自由度:

$$n = 6, \quad P_L = 8, \quad P_H = 1$$

$$F = 3n - 2P_L - P_H = 3 \times 6 - 2 \times 8 - 1 = 1$$

2.4 习题解答

习题 2-1 解释下列概念：

运动副；机构自由度；公共约束；机构运动简图；机构结构分析；高副低代。

【解题思路及技巧】

明确基本概念。

【解题过程】

运动副——两构件之间直接接触而又能产生一定相对运动的可动连接。

机构自由度——机构具有确定运动时所必须给定的独立运动参数的数目。

公共约束——机构中所有构件均受到的共同约束称为机构的公共约束。

机构运动简图——用简单的线条和规定的符号代表构件和运动副，并按比例绘制能够准确表达机构运动特性的简明图形。

机构结构分析——将机构分解为主动件、机架和若干基本杆组，进而了解机构的组成和级别。

高副低代——为使平面低副机构的结构分析和运动分析方法适用于高副机构，将平面机构中的高副用低副代替。

习题 2-2 验算图 2-3 所示机构能否运动，如果能运动，看运动是否具有确定性，并给出使该机构具有确定运动的修改办法。

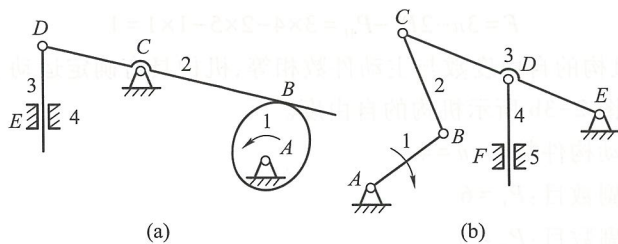


图 2-3

【解题思路及技巧】

- (1) 计算机构的自由度，进而判断其能否运动；
- (2) 使机构具有确定运动的修改方法通常是增加低副和活动构件，或用高副代替低副；
- (3) 修改机构时要注意主动件和执行构件的运动类型通常不能改变。

【解题过程】

- (1) 计算图 2-3a 所示机构的自由度。

机构的活动构件数目: $n=3$

机构的低副数目: $P_L=4$

机构的高副数目: $P_H=1$

机构的自由度为

$$F=3n-2P_L-P_H=3\times 3-2\times 4-1\times 1=0$$

该机构不能运动,修改后的机构运动简图如图 2-4a 所示。不可以采用图 2-4b 所示的修改方案。

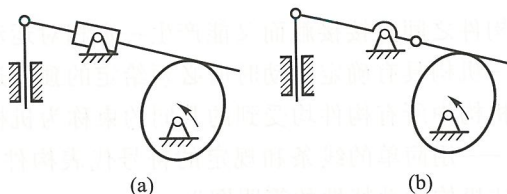


图 2-4

计算修改后图 2-4a 所示机构的自由度。

机构的活动构件数目: $n=4$

机构的低副数目: $P_L=5$

机构的高副数目: $P_H=1$

机构的自由度为

$$F=3n-2P_L-P_H=3\times 4-2\times 5-1\times 1=1$$

修改后,机构的自由度数与主动件数相等,机构具有确定运动。

(2) 计算图 2-3b 所示机构的自由度。

机构的活动构件数目: $n=4$

机构的低副数目: $P_L=6$

机构的高副数目: $P_H=0$

机构的自由度为

$$F=3n-2P_L-P_H=3\times 4-2\times 6-1\times 0=0$$

该机构不能运动,修改后的机构运动简图如图 2-5a 所示。不可以采用图 2-5b 所示的修改方案。

计算修改后图 2-5a 所示机构的自由度。

机构的活动构件数目: $n=5$

机构的低副数目: $P_L=7$

机构的高副数目: $P_H=0$

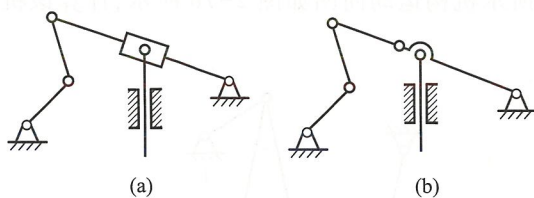


图 2-5

机构的自由度为

$$F = 3n - 2P_L - P_H = 3 \times 5 - 2 \times 7 - 1 \times 0 = 1$$

修改后,机构的自由度数与主动件数相等,机构具有确定运动。

习题 2-3 绘出图 2-6 所示机构的运动简图,并计算其自由度(其中构件 1 均为机架)。

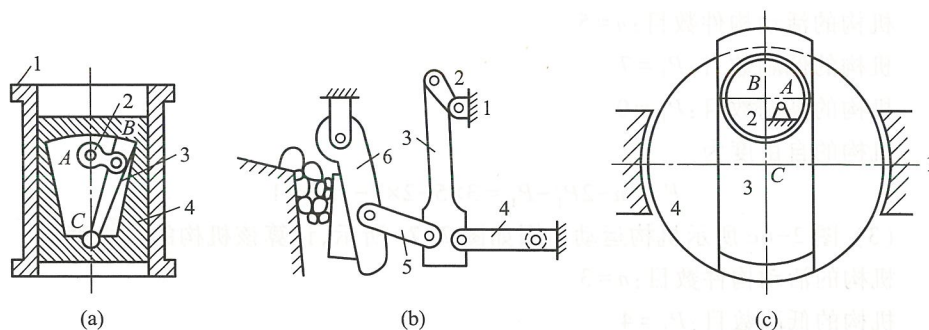


图 2-6

【解题思路及技巧】

(1) 首先确定组成机构的所有构件数目,然后确定构件间运动副的类型和数目;

(2) 选择构件的运动平面为投影面,选择适当的比例尺,然后用规定的符号画出各类运动副,并将同一构件上的运动副符号用简单线条连接起来。

【解题过程】

(1) 图 2-6a 所示机构运动简图如图 2-7a 所示,计算该机构的自由度。

机构的活动构件数目: $n = 3$

机构的低副数目: $P_L = 4$

机构的高副数目: $P_H = 0$

机构的自由度为

$$F = 3n - 2P_L - P_H = 3 \times 3 - 2 \times 4 - 1 \times 0 = 1$$

(2) 图 2-6b 所示机构运动简图如图 2-7b 所示, 计算该机构的自由度。

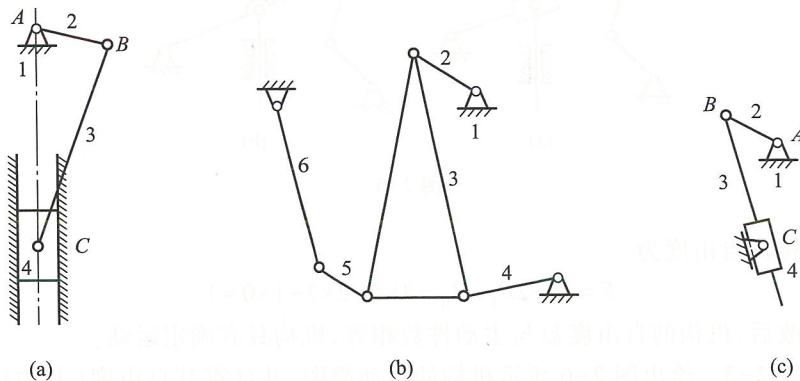


图 2-7

机构的活动构件数目: $n=5$

机构的低副数目: $P_L=7$

机构的高副数目: $P_H=0$

机构的自由度为

$$F=3n-2P_L-P_H=3\times 5-2\times 7-1\times 0=1$$

(3) 图 2-6c 所示机构运动简图如图 2-7c 所示, 计算该机构的自由度。

机构的活动构件数目: $n=3$

机构的低副数目: $P_L=4$

机构的高副数目: $P_H=0$

机构的自由度为

$$F=3n-2P_L-P_H=3\times 3-2\times 4-1\times 0=1$$

习题 2-4 计算图 2-8 所示各机构的自由度, 并说明注意事项。

(1) 计算图 2-8a 所示机构的自由度。

【解题思路及技巧】

BCD 为刚性结构, 是一个构件。

【解题过程】

机构的活动构件数目: $n=5$

机构的低副数目: $P_L=7$

机构的高副数目: $P_H=0$

机构的自由度为

$$F=3n-2P_L-P_H=3\times 5-2\times 7-1\times 0=1$$

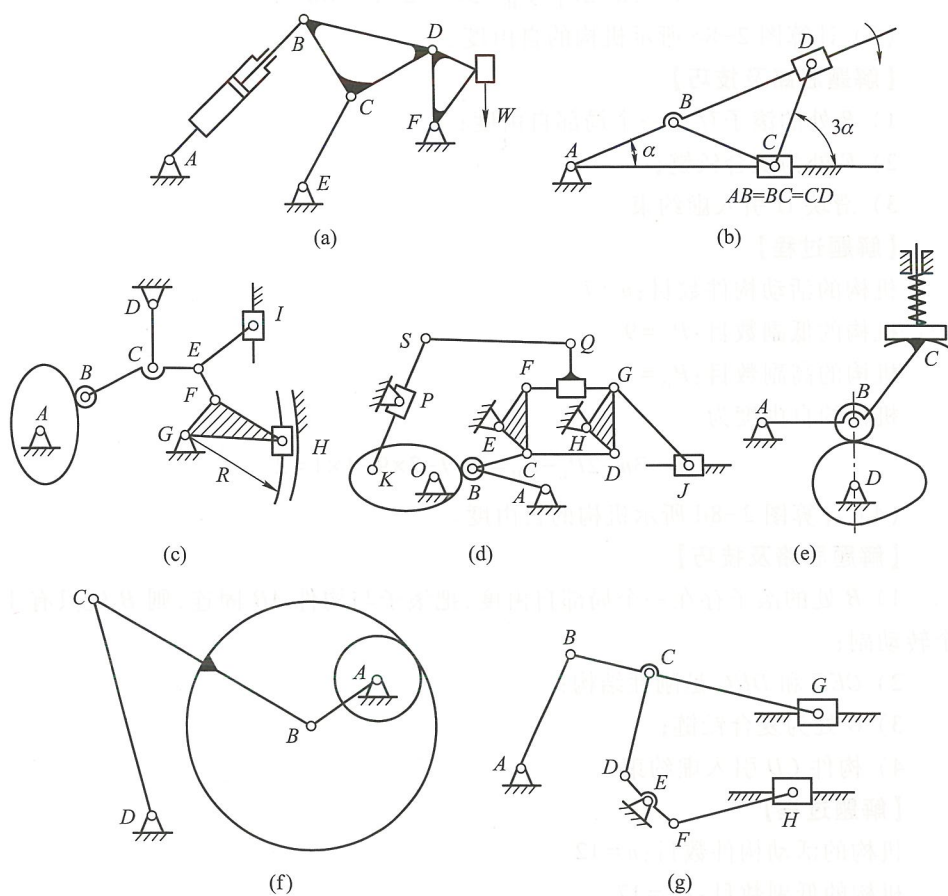


图 2-8

(2) 计算图 2-8b 所示机构的自由度。

【解题思路及技巧】

- 1) C 处为复合铰链；
- 2) $AB=BC=CD$, 并没有引入虚约束, 只是保证了构件 CD 与机架的夹角为 3α 。

【解题过程】

机构的活动构件数目: $n=5$

机构的低副数目: $P_L=7$

机构的高副数目: $P_H=0$

机构的自由度为

$$F = 3n - 2P_L - P_H = 3 \times 5 - 2 \times 7 - 1 \times 0 = 1$$

(3) 计算图 2-8c 所示机构的自由度。

【解题思路及技巧】

- 1) B 处的滚子存在一个局部自由度；
- 2) E 处为复合铰链；
- 3) 滑块 H 引入虚约束。

【解题过程】

机构的活动构件数目： $n = 7$

机构的低副数目： $P_L = 9$

机构的高副数目： $P_H = 1$

机构的自由度为

$$F = 3n - 2P_L - P_H = 3 \times 7 - 2 \times 9 - 1 \times 1 = 2$$

(4) 计算图 2-8d 所示机构的自由度。

【解题思路及技巧】

1) B 处的滚子存在一个局部自由度,把滚子与构件 AB 固连,则 B 处只有 1 个转动副;

2) CEF 和 DHG 是刚性结构;

3) G 处为复合铰链;

4) 构件 CD 引入虚约束。

【解题过程】

机构的活动构件数目： $n = 12$

机构的低副数目： $P_L = 17$

机构的高副数目： $P_H = 1$

机构的自由度为

$$F = 3n - 2P_L - P_H = 3 \times 12 - 2 \times 17 - 1 \times 1 = 1$$

(5) 计算图 2-8e 所示机构的自由度。

【解题思路及技巧】

1) B 处的滚子存在一个局部自由度;

2) 弹簧起封闭作用,不作为构件处理。

【解题过程】

机构的活动构件数目： $n = 3$

机构的低副数目： $P_L = 3$

机构的高副数目： $P_H = 2$

机构的自由度为

$$F = 3n - 2P_L - P_H = 3 \times 3 - 2 \times 3 - 1 \times 2 = 1$$

(6) 计算图 2-8f 所示机构的自由度。

【解题思路及技巧】

在 A 处有复合铰链, 没有虚约束和局部自由度。

【解题过程】

机构的活动构件数目: $n = 4$

机构的低副数目: $P_L = 5$

机构的高副数目: $P_H = 1$

机构的自由度为

$$F = 3n - 2P_L - P_H = 3 \times 4 - 2 \times 5 - 1 \times 1 = 1$$

(7) 计算图 2-8g 所示机构的自由度。

【解题思路及技巧】

没有复合铰链、局部自由度和虚约束。

【解题过程】

机构的活动构件数目: $n = 7$

机构的低副数目: $P_L = 10$

机构的高副数目: $P_H = 0$

机构的自由度为

$$F = 3n - 2P_L - P_H = 3 \times 7 - 2 \times 10 - 1 \times 0 = 1$$

习题 2-5 计算图 2-9 所示各机构的自由度, 并确定基本杆组及机构的级别 (图 2-9a 所示机构分别以构件 2、4、8 为主动件)。

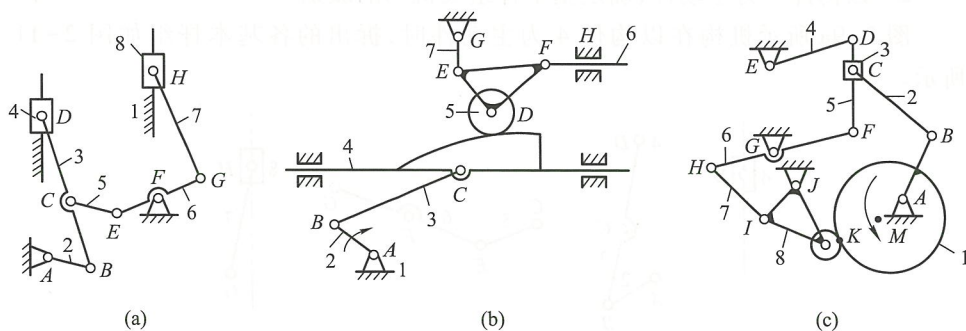


图 2-9

(1) 图 2-9a 所示机构。

【解题思路及技巧】

- 1) 计算机构的自由度；
- 2) 从离主动件较远的构件开始拆分, 先试拆 II 级杆组, 如不能拆出 II 级杆组, 则拆 III 级杆组。

【解题过程】

机构的活动构件数目: $n=7$

机构的低副数目: $P_L=10$

机构的高副数目: $P_H=0$

机构的自由度为

$$F=3n-2P_L-P_H=3\times 7-2\times 10-1\times 0=1$$

- 1) 以构件 2 为主动件, 确定基本杆组及机构的级别

图 2-9a 所示机构在以构件 2 为主动件时, 拆出的各基本杆组如图 2-10 所示。

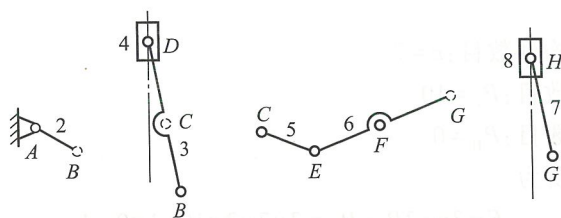


图 2-10

该机构由 3 个 II 级杆组和 1 个 I 级杆组组成, 故为 II 级机构。

- 2) 以构件 4 为主动件, 确定基本杆组及机构的级别

图 2-9a 所示机构在以构件 4 为主动件时, 拆出的各基本杆组如图 2-11 所示。

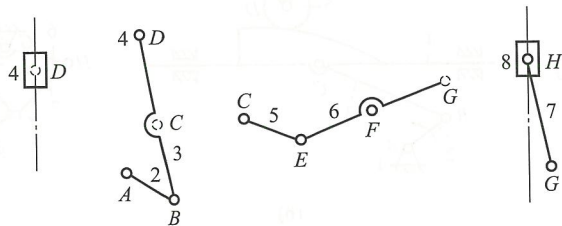


图 2-11

该机构由 1 个 I 级杆组和 3 个 II 级杆组组成, 故为 II 级机构。

3) 以构件 8 为主动件, 确定基本杆组及机构的级别

图 2-9a 所示机构在以构件 8 为主动件时, 拆出的各基本杆组如图 2-12 所示。

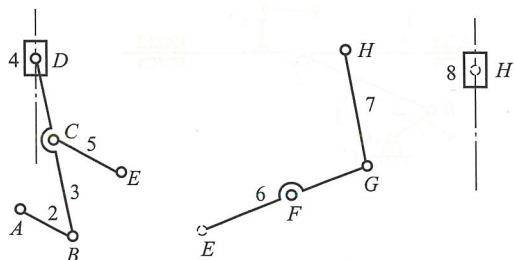


图 2-12

该机构由 1 个 I 级杆组、1 个 II 级杆组和 1 个 III 级杆组组成, 故为 III 级机构。

(2) 图 2-9b 所示机构。

【解题思路及技巧】

- 1) 计算机构的自由度;
- 2) 进行高副低代;
- 3) 从离主动件较远的构件开始拆分, 先试拆 II 级杆组, 如不能拆出 II 级杆组, 则拆 III 级杆组。

【解题过程】

机构的活动构件数目: $n=6$

机构的低副数目: $P_L=8$

机构的高副数目: $P_H=1$

机构的自由度为

$$F=3n-2P_L-P_H=3\times 6-2\times 8-1\times 1=1$$

该机构包含 1 个高副, 若对其进行结构分析, 则应先进行高副低代。高副低代后的机构运动简图如图 2-13a 所示。

组成图 2-13a 所示机构的各基本杆组如图 2-13b 所示。

该机构由 1 个 I 级杆组、1 个 II 级杆组和 1 个 III 级杆组组成, 故为 III 级机构。

(3) 图 2-9c 所示机构。

【解题思路及技巧】

- 1) 计算机构的自由度;

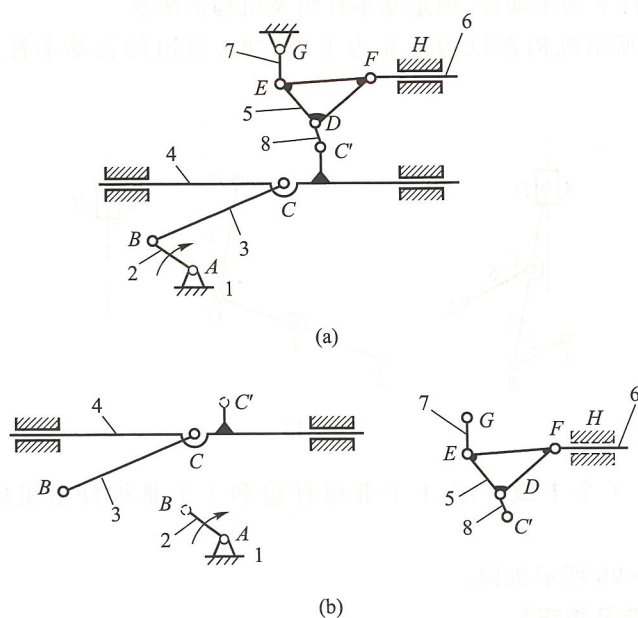


图 2-13

2) 进行高副低代;

3) 拆分基本杆组。

【解题过程】

1) 计算机构自由度

机构的活动构件数目: $n = 8$

机构的低副数目: $P_L = 11$

机构的高副数目: $P_H = 1$

机构的自由度为

$$F = 3n - 2P_L - P_H = 3 \times 8 - 2 \times 11 - 1 \times 1 = 1$$

2) 高副低代

机构中滚子 9 与凸轮 1 的轮廓接触点为 K 。设凸轮 1 在点 K 处的曲率中心为 M ，则高副低代后的机构运动简图如图 2-14a 所示。

3) 对高副低代后的机构拆分基本杆组

组成图 2-14a 所示机构的各基本杆组如图 2-14b 所示。

该机构由 1 个 I 级杆组、2 个 II 级杆组和 1 个 III 级杆组组成，故为 III 级机构。

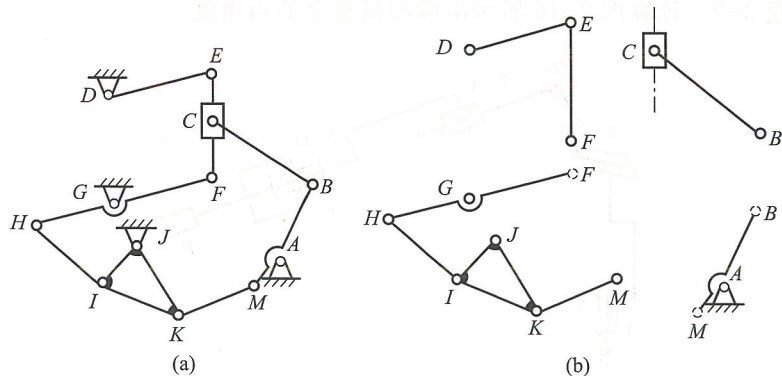


图 2-14

习题 2-6 计算图 2-15 所示 6-SPS 型并联机构的自由度。

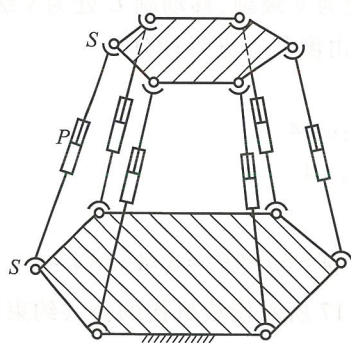


图 2-15

【解题思路及技巧】

(1) 利用空间机构自由度公式进行计算；

(2) 球面副 S 为Ⅲ级副,移动副 P 为Ⅴ级副,且每个支撑杆的移动副上有一个绕轴转动的局部自由度。

【解题过程】

机构的活动构件数目: $n = 13$

机构的Ⅴ级副数目: $P_5 = 6$

机构的Ⅲ级副数目: $P_3 = 12$

机构的自由度为

$$F = 6n - 5P_5 - 3P_3 = 6 \times 13 - 5 \times 6 - 3 \times 12 = 12$$

由于该机构含有 6 个局部自由度,所以自由度为

$$F' = F - 6 = 6$$

习题 2-7 计算图 2-16 所示串联型机械手的自由度。

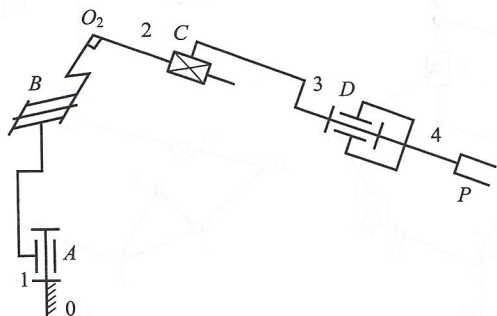


图 2-16

【解题思路及技巧】

- (1) 转动副 A、B、D 处为 V 级副, 移动副 C 处为 V 级副;
- (2) 利用空间机构自由度公式进行计算。

【解题过程】

机构的活动构件数目: $n = 4$

机构的 V 级副数目: $P_5 = 4$

机构的自由度为

$$F = 6n - 5P_5 = 6 \times 4 - 5 \times 4 = 4$$

习题 2-8 分析图 2-17 所示楔块机构的公共约束数, 并计算其自由度。

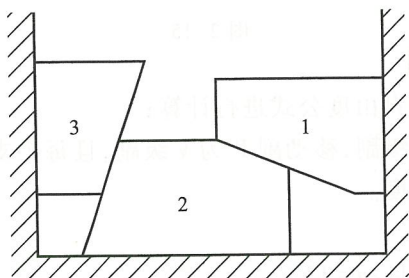


图 2-17

【解题思路及技巧】

- (1) 因为该机构是一个全移动副平面机构, 3 个活动构件均被限制在平面内移动, 所以其公共约束数 $m = 4$;
- (2) 构件 1 与 2、构件 2 与 3 及构件 1、2、3 分别与机架构成 V 级副。

【解题过程】

公共约束数: $m=4$

机构的活动构件数目: $n=3$

机构的 V 级副数目: $P_5=5$

机构的自由度为

$$F=(6-m)n-(5-m)P_5=2 \times 3-1 \times 5=1$$

第三章 平面机构的运动分析

3.1 基本要求

1. 掌握用瞬心法进行机构运动分析的方法；
2. 掌握用杆组法进行机构运动分析的方法。

3.2 重点及难点解析

3.2.1 本章重点

本章重点是瞬心的基本概念,瞬心法在平面机构运动分析中的应用,用杆组法进行平面机构运动分析的方法。

1. 速度瞬心

相对作平面运动的两构件上瞬时相对速度等于零的点或者说绝对速度相等的点(即等速重合点)称为速度瞬心(简称瞬心)。绝对速度为零的瞬心称为绝对瞬心,绝对速度不等于零的瞬心称为相对瞬心。用符号 P_{ij} 表示构件 i 与构件 j 的速度瞬心。

2. 机构中瞬心位置的确定

(1) 直接构成运动副两构件的速度瞬心位置

1) 当两构件通过转动副直接连接在一起时,转动副的中心即为该两构件的瞬心;

2) 当两构件以移动副连接时,构件 1 相对于构件 2 的速度瞬心必在垂直于导路方向上的无穷远处;

3) 当两构件以平面高副相连接时,若高副两元素间作纯滚动,则该接触点即为瞬心;若高副两元素间既作相对滑动又作相对滚动,则瞬心必位于过高副两元素接触点处的公法线上,具体在法线上哪个位置,尚需根据其他条件再作具体分析确定。

(2) 用三心定理确定不直接组成运动副的两构件的速度瞬心位置

三心定理的内容:三个作平面运动构件的速度瞬心必在同一条直线上。当

机构中构件数较少时,直接用三心定理即可求出机构的全部速度瞬心。

3. 用速度瞬心对机构进行速度分析

4. 用杆组法进行平面机构运动分析

用杆组法对平面机构进行运动分析的关键是正确拆分基本杆组。拆杆组的方法是:从远离主动件的构件开始拆分,按基本杆组的特征,首先试拆Ⅱ级杆组,若不可能时再试拆Ⅲ级杆组;每拆出一个杆组后,剩下部分仍组成机构,且自由度数与原机构相同,直至全部拆分成杆组,最后只剩下Ⅰ级机构。本书只介绍Ⅱ级杆组的运动分析,所以一般给定的用杆组法进行运动分析的题目中不会含Ⅲ级及Ⅲ级以上杆组。拆分杆组完成后,从主动件开始依次调用各杆组的运动分析程序对机构进行运动分析。

3.2.2 本章难点

本章的难点是当构件数目较多时机构中瞬心位置的确定。当机构中构件数目较多时,直接用三心定理求瞬心,不易找到不直接连接的构件的组合,更不易找到未知瞬心位于哪两个瞬心的连线上,此时用瞬心多边形法更为方便。瞬心多边形法实际上也是应用三心定理寻找瞬心,只不过通过该方法可快速找到未知瞬心位于哪两个已知瞬心的连线上。瞬心多边形法的内容是:未知瞬心位于能与该瞬心组成三角形的其他两已知瞬心的连线上。

3.3 典型例题分析及解题技巧

例 3-1 图 3-1 所示为曲柄摇块机构,试画出机构在图示位置的全部速度瞬心,并画出图示位置点 D 和点 E 的速度方向。

【解题思路及技巧】

(1) 本题的机构由 4 个构件组成,共有 6 个瞬心,其中不直接相连两构件的瞬心有 2 个,分别为 P_{13} 和 P_{24} ,该 2 个瞬心可用三心定理直接求解,也可用瞬心多边形法进行求解。

(2) 当两构件以移动副连接时,两构件的瞬心必在垂直于导路方向上的无穷远处,且该瞬心可沿导路方向按需要平行移动。

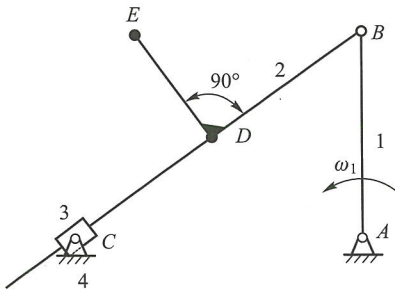


图 3-1

(3) 点 D 和点 E 为构件 2 上的点, 为标出该两点的速度方向, 需要找到绝对速度瞬心 P_{24} 。

【解题过程】

(1) 如图 3-2 所示, 该机构 3 个转动副的中心 A 、 B 、 C 分别为瞬心 P_{14} 、 P_{12} 和 P_{34} , P_{23} 在垂直于导路 2 的无穷远处; 由三心定理可知, 瞬心 P_{13} 在 P_{23} 和 P_{12} 连线与 P_{34} 和 P_{14} 连线的交点处, 瞬心 P_{24} 在 P_{14} 和 P_{12} 连线与 P_{34} 和 P_{23} 连线的交点处, 如图 3-2 所示。

(2) 如图 3-2 所示, 构件 2 的绝对速度瞬心为 P_{24} , 作辅助线 $P_{24}D$ 和 $P_{24}E$, 则 $v_D \perp P_{24}D$, $v_E \perp P_{24}E$, 方向见图 3-2。

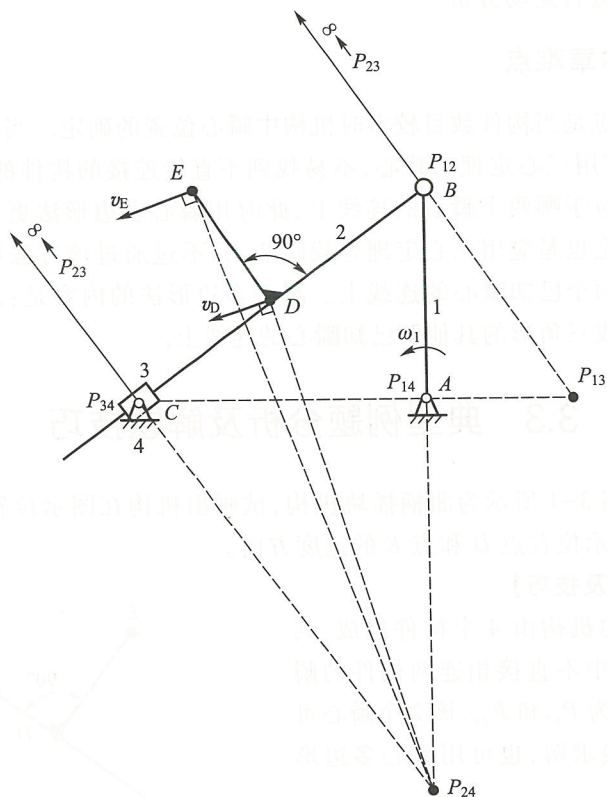


图 3-2

例 3-2 试画出图 3-3 所示机构在图示位置的全部速度瞬心的位置。

【解题思路及技巧】

由于该机构中构件数目较多, 所以用瞬心多边形法求解。

【解题过程】

本题的机构由 6 个构件组成,共有 15 个瞬心,其中通过运动副相连的构件的瞬心有 7 个,分别为 P_{12} 、 P_{23} 、 P_{34} 、 P_{45} 、 P_{56} 、 P_{16} 和 P_{36} 。对于不直接通过运动副相连接的其他构件间的瞬心,则根据上述的 7 个瞬心,用瞬心多边形法求解。画出凸六边形的 6 个顶点 1、2、3、4、5 和 6,表示该机构的 6 个构件。用实线连接顶点 1、2,表示已知瞬心 P_{12} 。同理,将其他 6 个已知瞬心的两顶点用实线连起来,则表示瞬心 P_{23} 、 P_{34} 、 P_{45} 、 P_{56} 、 P_{16} 和 P_{36} ,如图 3-4a 所示。本题可按如下步骤求其他 8 个未知瞬心。

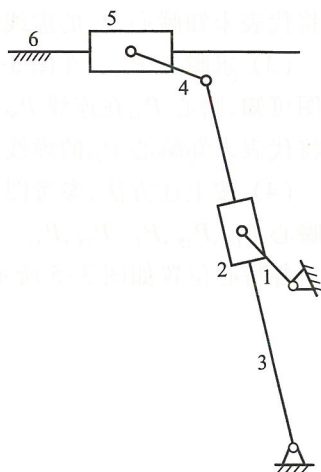


图 3-3

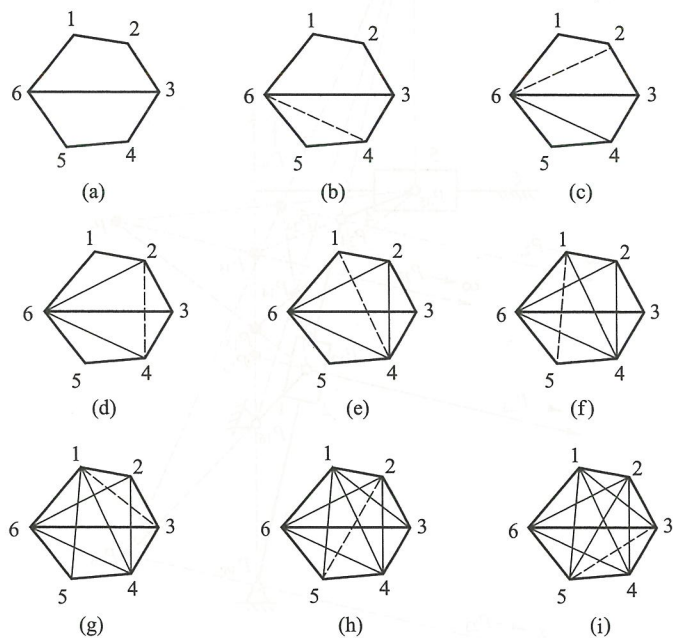


图 3-4

(1) 求瞬心 P_{46} 。在图 3-4b 中,用虚线连接顶点 4 和 6,表示未知瞬心 P_{46} 。由图可知,瞬心 P_{46} 在连线 $P_{36}P_{34}$ 、 $P_{56}P_{54}$ 的交点处。求得瞬心 P_{46} 后,在图 3-4b 中将代表未知瞬心 P_{46} 的虚线改成实线。

(2) 求瞬心 P_{26} 。在图 3-4c 中,用虚线连接顶点 2 和 6,表示未知瞬心 P_{26} 。由图可知,瞬心 P_{26} 在连线 $P_{16}P_{12}$ 、 $P_{36}P_{32}$ 的交点处。求得瞬心 P_{26} 后,在图 3-4c

中将代表未知瞬心 P_{26} 的虚线改成实线。

(3) 求瞬心 P_{24} 。在图 3-4d 中,用虚线连接顶点 2 和 4,表示未知瞬心 P_{24} 。由图可知,瞬心 P_{24} 在连线 $P_{62}P_{64}$ 、 $P_{32}P_{34}$ 的交点处。求得瞬心 P_{24} 后,在图 3-4d 中将代表未知瞬心 P_{24} 的虚线改成实线。

(4) 按上述方法,参考图 3-4e、图 3-4f、图 3-4g、图 3-4h、图 3-4i 可分别求得瞬心 P_{14} 、 P_{15} 、 P_{13} 、 P_{25} 、 P_{35} 。

各瞬心位置如图 3-5 所示。

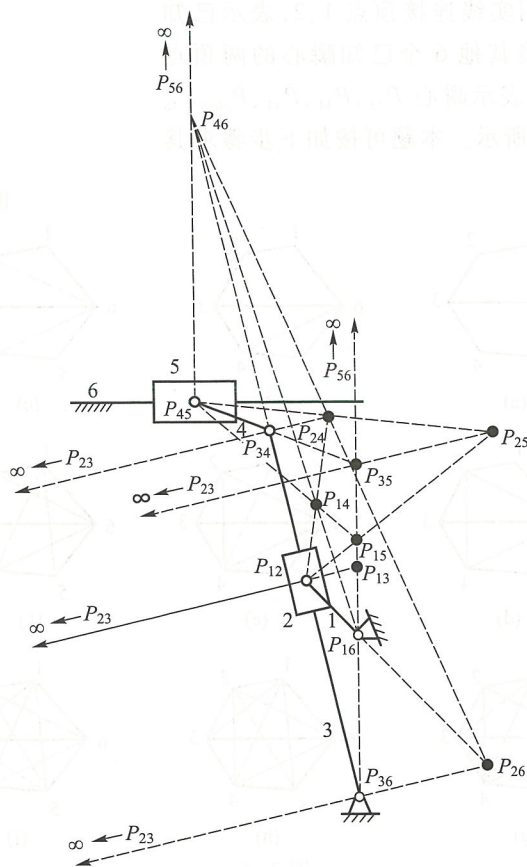


图 3-5

3.4 习题解答

习题 3-1 试求图 3-6 所示各机构在图示位置时全部瞬心的位置。

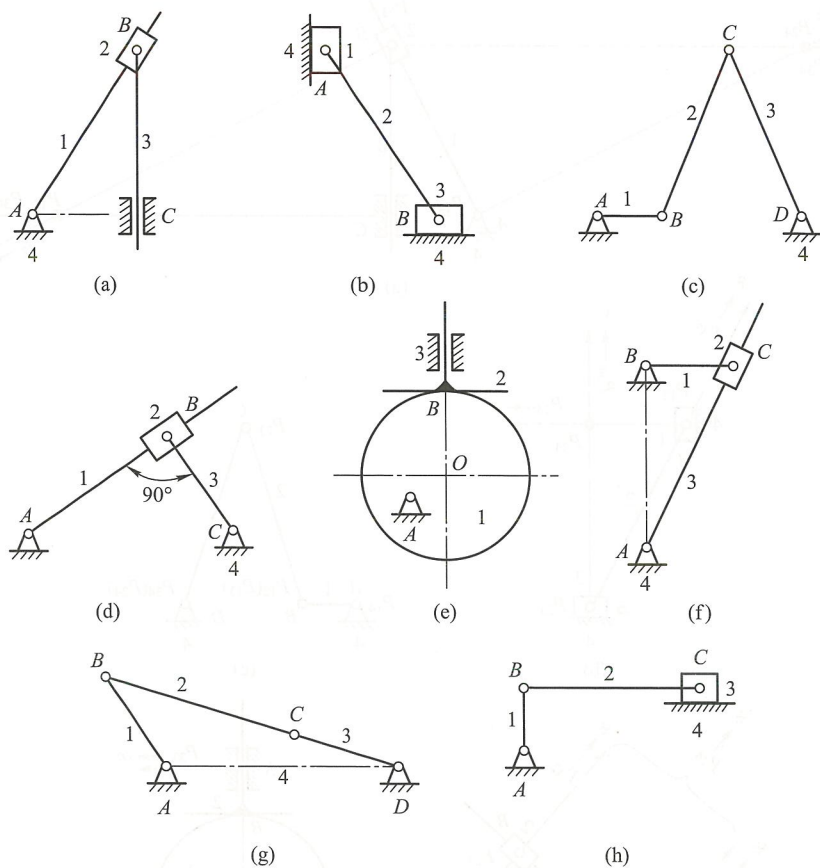


图 3-6

【解题思路及技巧】

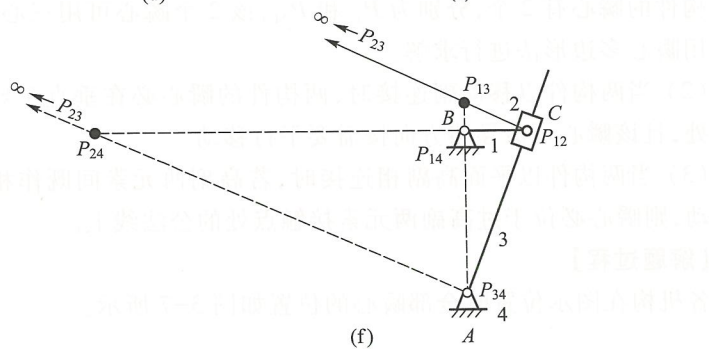
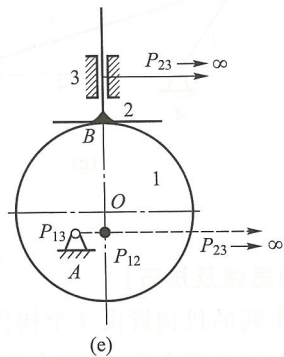
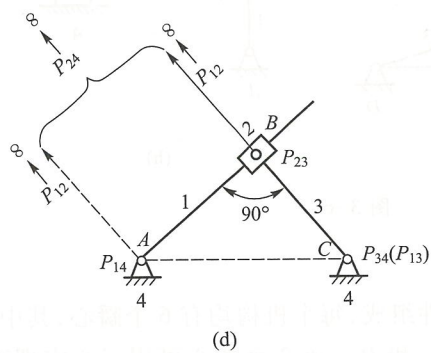
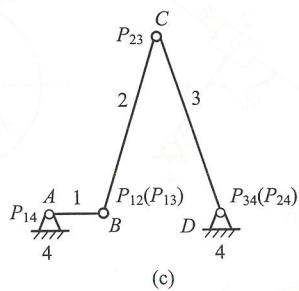
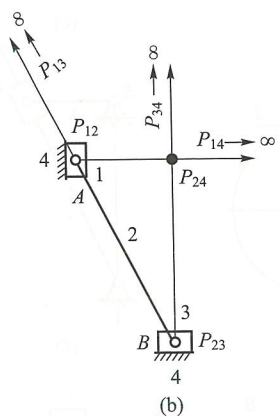
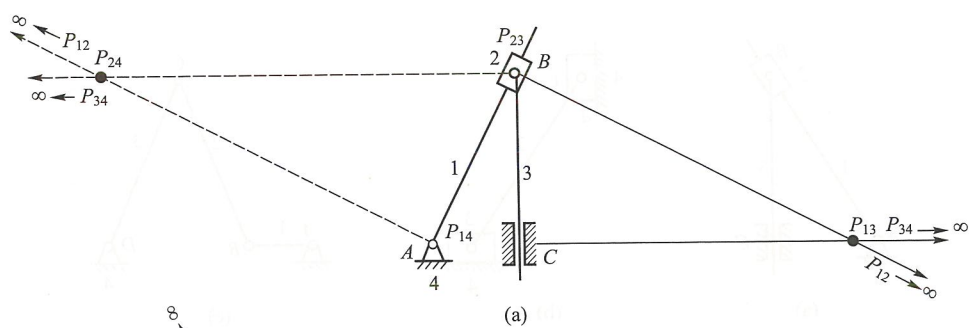
(1) 本题的机构皆由 4 个构件组成, 每个机构均有 6 个瞬心, 其中不直接相连两构件的瞬心有 2 个, 分别为 P_{13} 和 P_{24} , 该 2 个瞬心可用三心定理直接求解, 也可用瞬心多边形法进行求解。

(2) 当两构件以移动副连接时, 两构件的瞬心必在垂直于导路方向上的无穷远处, 且该瞬心可沿导路方向按需要平行移动。

(3) 当两构件以平面高副相连接时, 若高副两元素间既作相对滑动又作相对滚动, 则瞬心必位于过高副两元素接触点处的公法线上。

【解题过程】

各机构在图示位置时全部瞬心的位置如图 3-7 所示。



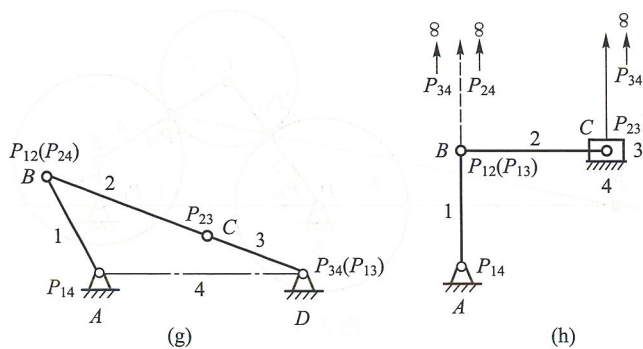


图 3-7

习题 3-2 试用速度瞬心法求图 3-8 所示的齿轮-连杆组合机构中齿轮 1 与齿轮 3 的传动比 ω_1/ω_3 。

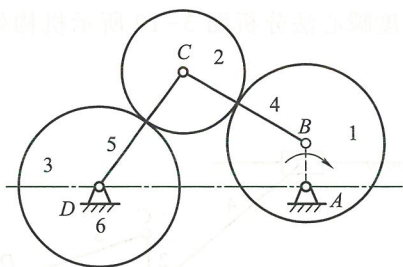


图 3-8

【解题思路及技巧】

(1) 该机构由 6 个构件组成,共有 15 个瞬心。本题的关键是找到相对速度瞬心 P_{13} ,绝对速度瞬心 P_{16} 和 P_{36} ,不必求出全部瞬心。

(2) 用三心定理求解。

【解题过程】

如图 3-9 所示,齿轮 1 与机架 6 的瞬心 P_{16} 在转动副中心 A 处,齿轮 3 与机架 6 的瞬心 P_{36} 在转动副中心 D 处。齿轮 1 和齿轮 3 不直接接触,需用三心定理求瞬心 P_{13} 。由于齿轮间为纯滚动的高副,所以两节圆的切点即为相对速度瞬心,即齿轮 1 和齿轮 2 节圆的切点为相对速度瞬心 P_{12} ,齿轮 2 和齿轮 3 节圆的切点为相对速度瞬心 P_{23} 。由三心定理可知,瞬心 P_{13} 在 P_{23} 和 P_{12} 连线与 P_{16} 和 P_{36} 连线的交点处。

齿轮 1 与齿轮 3 在相对速度瞬心 P_{13} 处的绝对速度相等,则

$$v_{P_{13}} = \omega_1 \overline{P_{13}P_{16}}\mu_l = \omega_3 \overline{P_{13}P_{36}}\mu_l$$

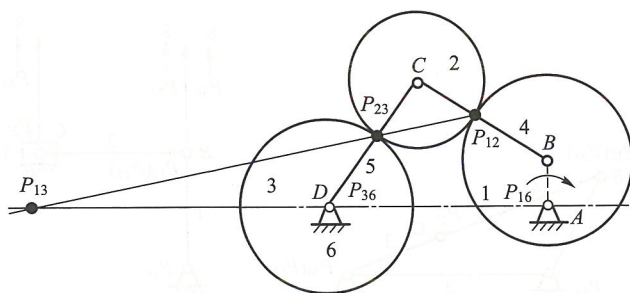


图 3-9

齿轮 1 与齿轮 3 的传动比

$$\frac{\omega_1}{\omega_3} = \frac{P_{13}P_{36}}{P_{13}P_{16}}$$

习题 3-3 试用速度瞬心法分析图 3-10 所示机构处于图示位置时铰链点 E、F 处速度的方向。

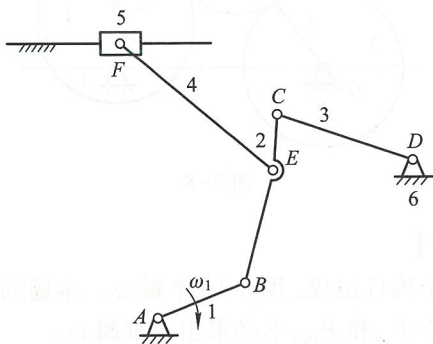


图 3-10

【解题思路及技巧】

(1) 该机构由 6 个构件组成, 共 15 个瞬心。本题的关键是找到绝对瞬心 P_{26} 和 P_{46} , 不必求出所有的瞬心。

(2) 由于机构的构件数目较多, 用瞬心多边形法求解。

【解题过程】

(1) 如图 3-11a 所示, 转动副中心 A、B、C、D、E、F 分别为瞬心 P_{16} 、 P_{12} 、 P_{23} 、 P_{36} 、 P_{24} 和 P_{45} , 瞬心 P_{56} 在垂直于滑块 5 导路的无穷远处。画图 3-11b 所示的凸

六边形的顶点,将代表已知瞬心 P_{16} 、 P_{12} 、 P_{23} 、 P_{36} 、 P_{24} 、 P_{45} 和 P_{56} 的边用实线连接。将顶点 2、6 及 4、6 用虚线连接。由图 3-11b 可知,待求瞬心 P_{26} 在 $P_{12}P_{16}$ 和 $P_{32}P_{36}$ 连线的交点上,瞬心 P_{46} 在 $P_{24}P_{26}$ 和 $P_{45}P_{56}$ 连线的交点上。由于瞬心 P_{12} 是构件 1 和构件 2 的相对速度瞬心,所以

$$v_B = \omega_1 l_{AB} = \omega_2 \overline{P_{12}P_{26}} \mu_l$$

$$\omega_2 = \frac{l_{AB}}{\overline{P_{12}P_{26}} \mu_l} \omega_1$$

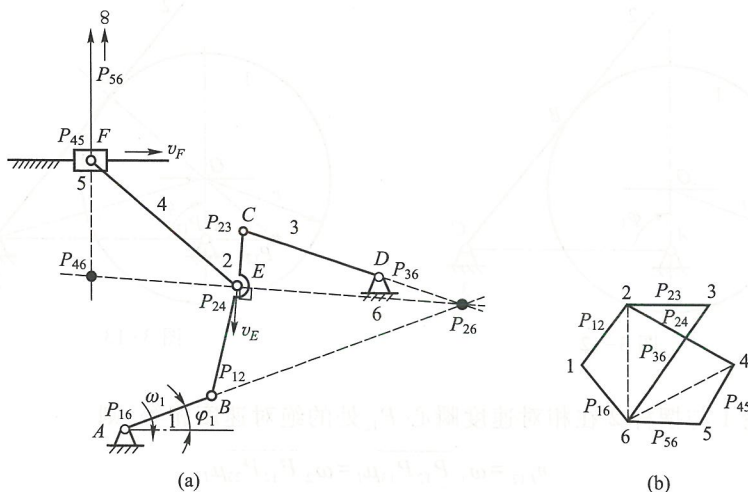


图 3-11

又由于瞬心 P_{24} 是构件 2 和构件 4 的相对速度瞬心,所以

$$v_E = \omega_2 \overline{P_{24}P_{26}} \mu_l = \omega_4 \overline{P_{24}P_{46}} \mu_l \text{ (方向:垂直于 } P_{24}P_{46} \text{ 向下)}$$

$$\omega_4 = \frac{\overline{P_{24}P_{26}}}{\overline{P_{12}P_{26}} \overline{P_{24}P_{46}} \mu_l} l_{AB} \omega_1$$

(2)

$$v_F = \omega_4 \overline{P_{46}P_{45}} \mu_l = \frac{\overline{P_{24}P_{26}} \overline{P_{46}P_{45}}}{\overline{P_{12}P_{26}} \overline{P_{24}P_{46}} \mu_l} l_{AB} \omega_1 \text{ (方向向右)}$$

习题 3-4 图 3-12 所示凸轮机构中,已知 $r = 50 \text{ mm}$, $l_{OA} = 22 \text{ mm}$, $l_{AC} = 80 \text{ mm}$, $\varphi_1 = 90^\circ$, 凸轮 1 以等角速度 $\omega_1 = 10 \text{ rad/s}$ 逆时针方向转动。试用速度瞬心法求从动件 2 的角速度 ω_2 。

【解题思路及技巧】

当两构件以平面高副相连接时,若高副两元素间既作相对滑动又作相对滚动,则瞬心必位于过高副两元素接触点处的公法线上。

【解题过程】

凸轮 1 与机架 3 的瞬心 P_{13} 在铰链中心 A 处,摆杆 2 与机架 3 的瞬心 P_{23} 在铰链中心 C 处。凸轮 1 和摆杆 2 的瞬心 P_{12} 在接触点 B 处的公法线上(即在 OB 连线上),同时又在 P_{13} 和 P_{23} 连线上,所以 P_{12} 在 OB 线与 P_{13} 和 P_{23} 连线的交点处,如图 3-13 所示。

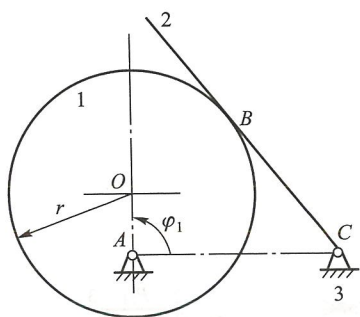


图 3-12

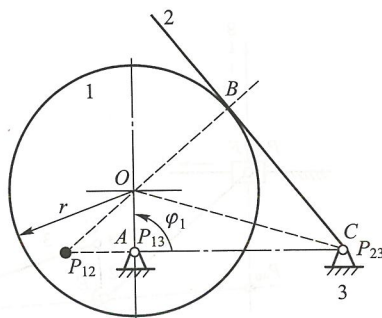


图 3-13

凸轮 1 与摆杆 2 在相对速度瞬心 P_{12} 处的绝对速度相等,则

$$v_{P_{12}} = \omega_1 \overline{P_{12}P_{13}}\mu_l = \omega_2 \overline{P_{12}P_{23}}\mu_l$$

$$\omega_2 = \frac{\omega_1 \overline{P_{12}P_{13}}}{\overline{P_{12}P_{23}}}$$

凸轮 1 的几何中心 O 到摆杆 2 的摆动中心 C 间的距离为

$$l_{OC} = \sqrt{l_{OA}^2 + l_{AC}^2} = \sqrt{22^2 + 80^2} \text{ mm} = 82.9699 \text{ mm}$$

在直角三角形 OBC 中, $\angle BOC$ 为

$$\angle BOC = \arccos \frac{l_{OB}}{l_{OC}} = \arccos \frac{50}{82.9699} = 52.9416^\circ$$

在直角三角形 OAC 中, $\angle AOC$ 为

$$\angle AOC = \arccos \frac{l_{OA}}{l_{OC}} = \arccos \frac{22}{82.9699} = 74.6237^\circ$$

所以 $\angle P_{12}OA$ 为

$$\angle P_{12}OA = 180^\circ - \angle BOC - \angle AOC = 180^\circ - 52.9416^\circ - 74.6237^\circ = 52.4347^\circ$$

在 $\triangle OAP_{12}$ 中,

$$\overline{P_{12}P_{13}} = l_{OA} \tan \angle P_{12}OA = 22 \tan 52.4347^\circ = 28.6034 \text{ mm}$$

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{\overline{P_{12}P_{13}}}{\overline{P_{12}P_{23}}} = \omega_1 \frac{\overline{P_{12}P_{13}}}{\overline{P_{12}P_{13}} + l_{AC}} = 10 \times \frac{28.6034}{28.6034 + 80} \text{ rad/s} = 2.6337 \text{ rad/s}$$

习题 3-5 图 3-14 所示四杆机构中, $l_{AB} = 60 \text{ mm}$, $l_{CD} = 90 \text{ mm}$, $l_{AD} = l_{BC} = 120 \text{ mm}$, $\omega_2 = 10 \text{ rad/s}$, 试用速度瞬心法求:

- (1) 当 $\varphi = 165^\circ$ 时, 点 C 的速度 v_C ;
- (2) 当 $\varphi = 165^\circ$ 时, 构件 3 的 BC 线上 (或其延长线上) 速度最小的一点 E 的位置及其速度的大小;
- (3) 当 $v_C = 0$ 时, φ 角之值 (有两个解)。

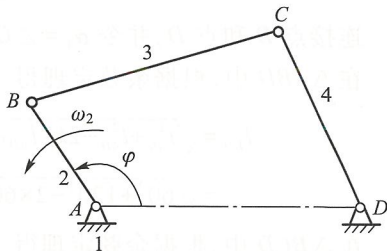


图 3-14

【解题思路及技巧】

(1) 用三心定理求不直接接触两构件间的瞬心。

(2) 构件上某点速度的大小等于该点到绝对速度瞬心间的距离与转动角速度的乘积。当该点到绝对速度瞬心间的距离为零时, 其速度为 0。

【解题过程】

(1) 如图 3-15 所示, 该机构的 4 个转动副的中心 A 、 B 、 C 、 D 分别为瞬心 P_{12} 、 P_{23} 、 P_{34} 和 P_{14} ; 由三心定理可知, 瞬心 P_{13} 在 P_{23} 和 P_{12} 连线与 P_{34} 和 P_{14} 连线的交点处, 瞬心 P_{24} 在 P_{14} 和 P_{12} 连线与 P_{34} 和 P_{23} 连线的交点处。

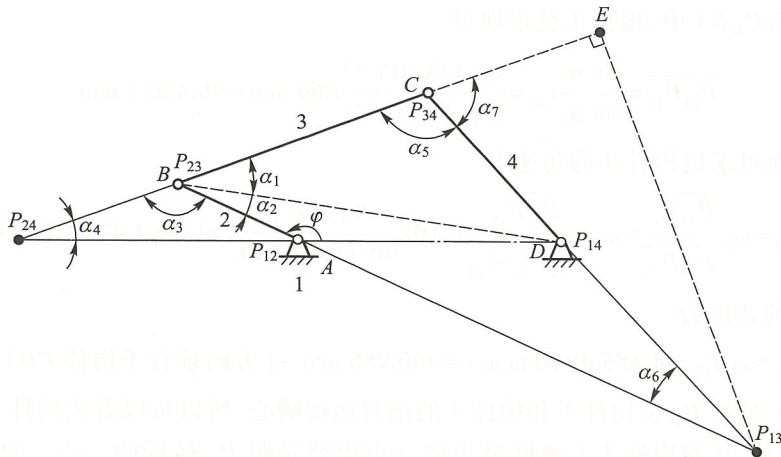


图 3-15

在瞬心 P_{24} 处, 构件 2 与构件 4 的绝对速度相等, 则

$$v_{P_{24}} = \omega_2 \overline{P_{24}P_{12}} \mu_l = \omega_4 \overline{P_{24}P_{14}} \mu_l$$

$$\omega_4 = \omega_2 \frac{\overline{P_{24}P_{12}}}{\overline{P_{24}P_{14}}} = \omega_2 \frac{\overline{P_{24}P_{12}}}{\overline{P_{24}P_{12}} + l_{AD}}$$

连接点 B 和点 D , 并令 $\alpha_1 = \angle CBD$, $\alpha_2 = \angle DBA$, $\alpha_3 = \angle P_{24}BA$, $\alpha_4 = \angle BP_{24}A$ 。

在 $\triangle ABD$ 中, 根据余弦定理得

$$l_{BD} = \sqrt{l_{AB}^2 + l_{AD}^2 - 2l_{AB}l_{AD}\cos\varphi}$$

$$= \sqrt{60^2 + 120^2 - 2 \times 60 \times 120 \times \cos 165^\circ} \text{ mm} = 178.6318 \text{ mm}$$

在 $\triangle BCD$ 中, 根据余弦定理得

$$\alpha_1 = \arccos \frac{l_{CD}^2 - l_{BC}^2 - l_{BD}^2}{-2l_{BC}l_{BD}}$$

$$= \arccos \frac{90^2 - 120^2 - 178.6318^2}{-2 \times 120 \times 178.6318} = 26.9693^\circ$$

在 $\triangle ABD$ 中, 根据正弦定理得

$$\alpha_2 = \arcsin \left(\frac{\sin \varphi}{l_{BD}} l_{AD} \right) = \arcsin \left(\frac{\sin 165^\circ}{178.6318} \times 120 \right) = \arcsin 0.1738676 = 10.0128^\circ$$

$$\alpha_3 = 180^\circ - \alpha_1 - \alpha_2 = 180^\circ - 26.9693^\circ - 10.0128^\circ = 143.0179^\circ$$

$$\alpha_4 = \varphi - \alpha_3 = 165^\circ - 143.0179^\circ = 21.9821^\circ$$

在 $\triangle P_{24}BA$ 中, 根据正弦定理得

$$\overline{P_{24}P_{12}} = \frac{\sin \alpha_3}{\sin \alpha_4} l_{AB} = \frac{\sin 143.0179^\circ}{\sin 21.9821^\circ} \times 60 \text{ mm} = 96.4261 \text{ mm}$$

从而可求出构件 4 的角速度

$$\omega_4 = \omega_2 \frac{\overline{P_{24}P_{12}}}{\overline{P_{24}P_{14}}} = \omega_2 \frac{\overline{P_{24}P_{12}}}{\overline{P_{24}P_{12}} + l_{AD}} = 10 \times \frac{96.4261}{96.4261 + 120} \text{ rad/s} = 4.4554 \text{ rad/s}$$

则点 C 的速度为

$$v_C = \omega_4 l_{CD} = 4.4554 \times 90 \text{ mm/s} = 400.986 \text{ mm/s} \text{ (方向垂直于构件 } CD \text{)}$$

(2) 瞬心 P_{13} 是构件 1 和构件 3 的绝对速度瞬心, 所以可以看成构件 3 绕瞬心 P_{13} 转动, 从而构件 3 上速度最小的一点也就是距 P_{13} 最近的一点。过 P_{13} 做 BC (或其延长线) 的垂线, 垂足 E 即为构件 3 上距 P_{13} 最近的一点。

令 $\alpha_5 = \angle BCD$ 、 $\alpha_6 = \angle DP_{13}A$ 、 $\alpha_7 = \angle DCE$, 则在 $\triangle CDP_{24}$ 中, 由正弦定理得

$$\begin{aligned}\sin \alpha_5 &= \frac{\sin \alpha_4 \overline{P_{24}P_{14}}}{l_{CD}} = \frac{\sin \alpha_4}{l_{CD}} (\overline{P_{24}P_{12}} + l_{AD}) \\ &= \frac{\sin 21.9821^\circ}{90} \times (96.4261 + 120) = 0.90013\end{aligned}$$

$$\alpha_5 = 115.8244^\circ$$

$$\alpha_6 = 180^\circ - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_5 = 180^\circ - 26.9693^\circ - 10.0128^\circ - 115.8244^\circ = 27.1935^\circ$$

$$\alpha_7 = 180^\circ - \alpha_5 = 180^\circ - 115.8244^\circ = 64.1756^\circ$$

在 $\triangle BCP_{13}$ 中, 由正弦定理得

$$\frac{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}{\overline{P_{34}P_{13}}} = \frac{\sin \alpha_6}{l_{BC}}$$

$$\overline{P_{34}P_{13}} = l_{BC} \frac{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}{\sin \alpha_6} = 120 \text{ mm} \times \frac{\sin(26.9693^\circ + 10.0128^\circ)}{\sin 27.1935^\circ} = 157.96 \text{ mm}$$

速度最小的点 E 到速度瞬心 P_{13} 的距离为

$$\overline{EP_{13}} = \overline{P_{34}P_{13}} \sin \alpha_7 = 157.96 \text{ mm} \times \sin 64.1756^\circ = 142.185 \text{ mm}$$

在图示位置, 构件 3 的瞬时角速度为

$$\omega_3 = \frac{v_C}{\overline{P_{34}P_{13}}} = \frac{400.986}{157.96} \text{ rad/s} = 2.5385 \text{ rad/s}$$

构件 3 上 E 点的速度为

$$v_E = \omega_3 \overline{EP_{13}} = 2.5385 \times 142.185 \text{ mm/s} = 360.94 \text{ mm/s}$$

(3) 由 $v_C = \omega_4 l_{CD}$, 所以当 $v_C = 0$ 时, $\omega_4 = 0$ 。又因为 $\omega_4 = \omega_2 \frac{\overline{P_{24}P_{12}}}{\overline{P_{24}P_{14}}}$, 其中 $\omega_2 \neq 0$,

则必然有

$$\overline{P_{24}P_{12}} = 0$$

上式说明瞬心 P_{24} 与 P_{12} 重合, 只有当 BC 与 AB 共线时才会出现这种情况, 如图 3-16 所示。在此两位置时, 绝对速度瞬心 P_{13} 与 P_{34} 在点 C 重合, 这也进一步说明了机构在这两个位置时, 点 C 的速度等于 0。

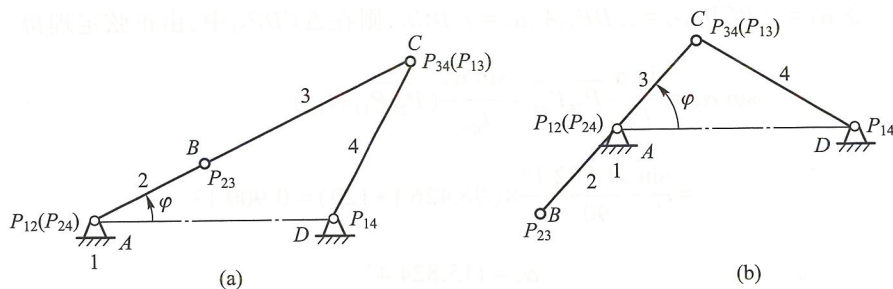


图 3-16

当 BC 与 AB 处于延长共线位置时, 在 $\triangle ACD$ 中, 由余弦定理可得

$$\cos \varphi = \frac{(l_{BC} + l_{AB})^2 + l_{AD}^2 - l_{CD}^2}{2(l_{BC} + l_{AB})l_{AD}} = \frac{(120 + 60)^2 + 120^2 - 90^2}{2 \times (120 + 60) \times 120} = 0.89583$$

$$\varphi = 26.38^\circ$$

当 BC 与 AB 处于重叠共线位置时, 在 $\triangle ACD$ 中, 由余弦定理可得

$$\cos \varphi = \frac{(l_{BC} - l_{AB})^2 + l_{AD}^2 - l_{CD}^2}{2(l_{BC} - l_{AB})l_{AD}} = \frac{(120 - 60)^2 + 120^2 - 90^2}{2 \times (120 - 60) \times 120} = 0.6875$$

$$\varphi = 46.57^\circ$$

习题 3-6 图 3-17 所示四杆机构中, 构件 1 为主动件, 以角速度 $\omega_1 = 10 \text{ rad/s}$ 做匀速转动。已知 $l_{AD} = 60 \text{ mm}$ 。试用速度瞬心法:

- (1) 在图中画出图示位置机构的所有速度瞬心;
- (2) 求构件 3 的速度 v_3 , 并指明其方向。

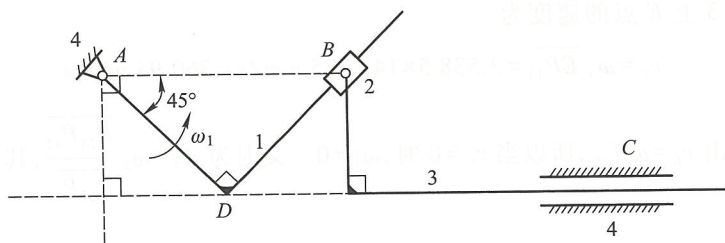


图 3-17

【解题思路及技巧】

- (1) 用三心定理求不直接接触两构件间的瞬心。
- (2) 两构件组成移动副, 其瞬心位于垂直于导路方向的无穷远处, 位置可沿

导路方向按需移动。

【解题过程】

(1) 该机构有 4 个构件, 共有 6 个瞬心。如图 3-18 所示, 该机构的 2 个转动副的中心 A 、 B 分别为瞬心 P_{14} 和 P_{23} ; 构件 1 和构件 2 间及构件 3 和构件 4 间组成移动副, 所以瞬心 P_{12} 及 P_{34} 位于垂直于导路方向的无穷远处; 由三心定理可知, 瞬心 P_{13} 在 P_{23} 和 P_{12} 连线与 P_{34} 和 P_{14} 连线的交点处, 瞬心 P_{24} 在 P_{14} 和 P_{12} 连线与 P_{34} 和 P_{23} 连线的交点处。

(2) 根据已知条件可知, $\triangle ADB$ 和 $\triangle P_{13}P_{14}P_{23}$ 为等腰直角三角形, 所以

$$l_{P_{13}P_{14}} = l_{AB} = \sqrt{2}l_{AD} = 60\sqrt{2} \text{ mm}$$

因瞬心 P_{13} 为构件 1 和构件 3 的等速重合点, 构件 3 为移动构件, 其上的速度处处相等, 所以构件 3 的速度等于瞬心 P_{13} 处的速度, 即

$$v_3 = v_{P_{13}} = \omega_1 l_{P_{13}P_{14}} = \omega_1 \times 60\sqrt{2} = 10 \times 60\sqrt{2} \text{ mm/s} = 848.5 \text{ mm/s (方向水平向左)}$$

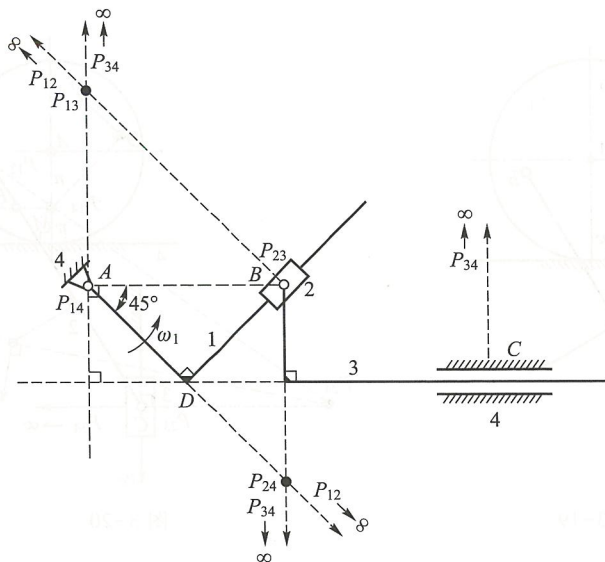


图 3-18

习题 3-7 图 3-19 所示机构中, 构件 1 为圆盘, 其几何中心为点 A 。已知各构件的尺寸及构件 1 上点 D 的速度 v_D 。试用速度瞬心法:

- (1) 在图中画出图示位置机构的所有速度瞬心;
- (2) 标出构件 3 滑块的速度 v_C 的方向;
- (3) 标出构件 2 上点 E 的速度 v_E 的方向。

【解题思路及技巧】

- (1) 用三心定理求不直接接触两构件间的瞬心。
- (2) 两构件组成移动副,其瞬心位于垂直于导路方向的无穷远处,位置可沿导路方向按需移动。

【解题过程】

(1) 该机构含有 4 个构件,共有 6 个瞬心,其中由构件直接连接组成运动副的瞬心有 3 个,分别为 P_{12} 、 P_{23} 和 P_{34} ,如图 3-20 所示。构件 1 与构件 4 在接触点 F 处组成滚动兼滑动的高副,所以瞬心 P_{14} 位于过构件 1 与构件 4 接触点 F 处的公法线 $n-n$ 上。由于 P_{14} 是构件 1 与构件 4 的绝对速度瞬心,所以在图示位置时构件 1 可以看成绕瞬心 P_{14} 作瞬时转动,从而点 D 的速度方向应与 DP_{14} 相垂直。因此,过点 D 作 $DM \perp v_D$,则 DM 与 $n-n$ 的交点即为瞬心 P_{14} 。然后根据三心定理确定瞬心 P_{13} 和 P_{24} 。瞬心 P_{13} 在连线 $P_{23}P_{12}$ 与 $P_{34}P_{14}$ 的交点处;瞬心 P_{24} 在连线 $P_{12}P_{14}$ 与 $P_{34}P_{23}$ 的交点处。至此,该机构的 6 个瞬心全部求出。

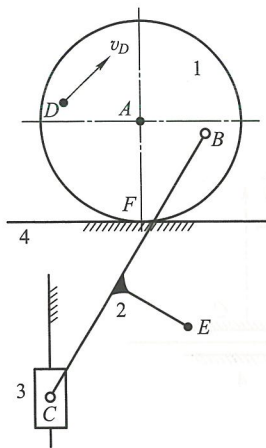


图 3-19

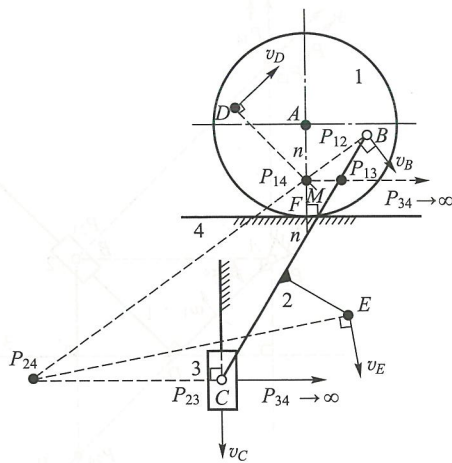


图 3-20

(2) 因为 P_{14} 是构件 1 的绝对速度瞬心,由构件 1 上点 D 的速度 v_D 的方向可知构件 1 是绕 P_{14} 顺时针方向旋转的,此时构件 1 上 P_{12} 处的速度 v_B 的方向如图 3-20 所示。而构件 2 上 P_{12} 处的速度 v_B 与构件 1 上 P_{12} 处的速度是相等的。因为 P_{24} 为构件 2 的绝对速度瞬心,且根据 v_B 的速度方向可知构件 2 是绕 P_{24} 顺时针方向旋转的,所以构件 2 上点 C 的速度方向为沿导路向下,如图 3-20 所示。

(3) 因为 P_{23} 是构件 2 与构件 3 的速度瞬心,所以构件 2 上点 C 的速度与构件 3 上点 C 的速度相等。按瞬心的定义,构件 2 上任意一点的速度方向与该点

到绝对速度瞬心 P_{24} 间的连线相垂直, 所以 $v_E \perp EP_{24}$ 。根据构件 2 绕 P_{24} 顺时针方向旋转, 得 v_E 的方向如图 3-20 所示。

习题 3-8 图 3-21 所示偏心曲柄滑块机构中, 构件 1 为主动件。已知: $l_{AB} = 80 \text{ mm}$, $l_{BC} = 193 \text{ mm}$, $l_{BD} = 133 \text{ mm}$, 偏距 $e = 38 \text{ mm}$, 图示位置构件 1 与水平线间的夹角 $\varphi = 34.3^\circ$, 构件 1 的角速度 $\omega_1 = 15 \text{ rad/s}$, $\angle CBD = 38.6^\circ$ 。试用速度瞬心法求 ω_2 、 v_B 、 v_C 和 v_D 。

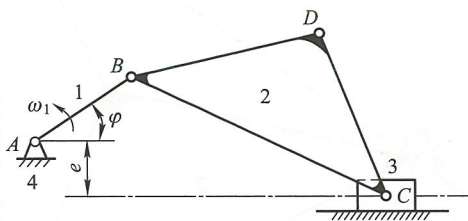


图 3-21

【解题思路及技巧】

(1) 两构件组成移动副, 其瞬心位于垂直于导路方向的无穷远处, 位置可沿导路方向按需移动。

(2) 用三心定理求不直接相连构件 2 和构件 4 间的绝对速度瞬心 P_{24} 。

【解题过程】

该机构的瞬心 P_{14} 、 P_{12} 、 P_{23} 、 P_{34} 及 P_{24} 如图 3-22 所示。

如图 3-22 所示, 作辅助线 $AN \perp P_{24}P_{23}$, 作 BM 垂直于滑块 3 的导路并交 AN 于点 F 。则

$$l_{AF} = l_{AB} \cos \varphi = 80 \text{ mm} \times \cos 34.3^\circ = 66.08786 \text{ mm}$$

$$l_{FM} = e = 38 \text{ mm}$$

$$l_{BF} = l_{AB} \sin \varphi = 80 \times \sin 34.3^\circ = 45.08208 \text{ mm}$$

$$l_{BM} = l_{BF} + l_{FM} = 83.08208 \text{ mm}$$

$$l_{FN} = l_{MC} = \sqrt{l_{BC}^2 - l_{BM}^2} = \sqrt{193^2 - 83.08208^2} = 174.2021 \text{ mm}$$

$$l_{AN} = l_{AF} + l_{FN} = 66.08786 + 174.2021 = 240.28996 \text{ mm}$$

$$l_{P_{24}N} = l_{AN} \tan \varphi = 240.28996 \tan 34.3^\circ = 163.914697 \text{ mm}$$

$$l_{P_{24}C} = l_{P_{24}N} + e = 163.914697 + 38 = 201.914697 \text{ mm}$$

$$l_{P_{14}P_{24}} = l_{AN} / \cos \varphi = 290.87333 \text{ mm}$$

$$l_{P_{12}P_{24}} = l_{P_{14}P_{24}} - l_{AB} = 210.87333 \text{ mm}$$

$$l_{DC} = \sqrt{l_{BD}^2 + l_{BC}^2 - 2l_{BD}l_{BC}\cos \angle CBD} = 121.7222 \text{ mm}$$

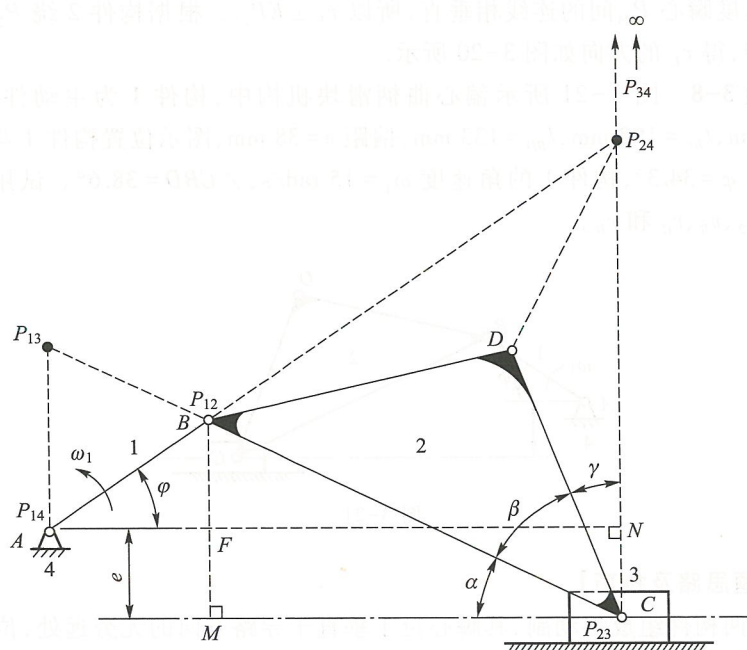


图 3-22

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{l_{BM}}{l_{BC}}\right) = 25.4978^\circ$$

$$\beta = \arcsin\left(\frac{l_{BD} \sin \angle CBD}{l_{DC}}\right) = 42.9753^\circ$$

$$\gamma = 90^\circ - \alpha - \beta = 21.5269^\circ$$

$$l_{P24D} = \sqrt{l_{DC}^2 + l_{P24C}^2 - 2l_{DC}l_{P24C} \cos \gamma} = 99.2957 \text{ mm}$$

$$v_{P12} = \omega_1 l_{P14P12} = \omega_2 l_{P24P12}$$

$$\omega_2 = \frac{\omega_1 l_{P14P12}}{l_{P24P12}} = \frac{15 \times 80}{210.8733} \text{ rad/s} = 5.691 \text{ rad/s}$$

$$v_B = \omega_1 \times l_{AB} = 1200 \text{ mm/s}$$

$$v_C = \omega_2 \times l_{P24C} = 1149.0965 \text{ mm/s}$$

$$v_D = \omega_2 \times l_{P24D} = 565.09 \text{ mm/s}$$

习题 3-9 图 3-23 所示转动导杆机构中, 已知 $l_{AC} = 50 \text{ mm}$, $l_{BC} = 100 \text{ mm}$, $\omega_1 = 20 \text{ rad/s}$ 。求在一个运动循环中, 构件 3 的角位移、角速度和角加速度。

【解题思路及技巧】

所有用杆组法进行运动分析的题目的解题关键是正确划分基本杆组, 然后调

用相应的程序求得待求点的位移、速度和加速度,以下各题相同,不再一一叙述。

【解题过程】

(1) 建立坐标系。建立以点 C 为原点的固定平面直角坐标系 Cxy , 如图 3-24 所示。

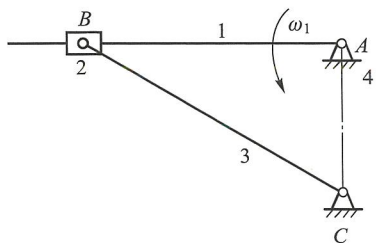


图 3-23

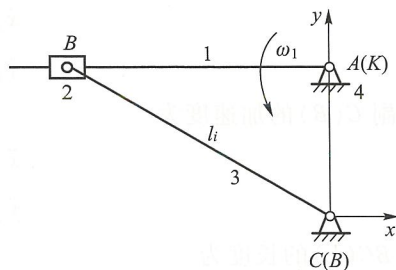


图 3-24

(2) 对机构进行结构分析。该机构由主动件 1 和杆 BC 及滑块 B (Ⅱ级杆组 RRP) 组成。确定与基本杆组 RRP 数学模型相对应的运动副及参考点字母标识 (图 3-24 括号中的字母)。

(3) 确定已知参数和求解流程。

主动件 1 实际就是 BC (Ⅱ级杆组 RRP) 上滑块 B 的导路, 因此, 可以把主动件 1 的运动参数看作是滑块 B 导路的运动参数。把滑块 B 导路上的参考点 K 选在点 A , 如图 3-24 所示。已知参考点 K 的位置坐标为

$$\left. \begin{aligned} x_K &= 0 \\ y_K &= 50 \end{aligned} \right\}$$

参考点 K 的速度为

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_K &= 0 \\ \dot{y}_K &= 0 \end{aligned} \right\}$$

参考点 K 的加速度为

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_K &= 0 \\ \ddot{y}_K &= 0 \end{aligned} \right\}$$

滑块 B 导路的转角为

$$\varphi_j = 0^\circ \sim 360^\circ$$

滑块 B 导路的角速度为

$$\dot{\varphi}_j = \omega_1 = 20 \text{ rad/s}$$

滑块 B 导路的角加速度为

$$\ddot{\varphi}_j = 0$$

运动副 $C(B)$ 的位置坐标为

$$\left. \begin{array}{l} x_B = 0 \\ y_B = 0 \end{array} \right\}$$

运动副 $C(B)$ 的速度为

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x}_B = 0 \\ \dot{y}_B = 0 \end{array} \right\}$$

运动副 $C(B)$ 的加速度为

$$\left. \begin{array}{l} \ddot{x}_B = 0 \\ \ddot{y}_B = 0 \end{array} \right\}$$

构件 $BC(l_i)$ 的长度为

$$l_i = 100 \text{ mm}$$

求出构件 $BC(l_i)$ 的转角 φ_i 、角速度 $\dot{\varphi}_i$ 、角加速度 $\ddot{\varphi}_i$ 。

(4) 用 VB 编程,程序如下。

```
'声明变量
Public f1(3600) As Double '主动件转角
Public f3(3600) As Double '构件 3 转角
Public w3(3600) As Double '构件 3 角速度
Public e3(3600) As Double '构件 3 角加速度
Public pi As Double
Public pa As Double
'主程序
Sub main()
    Dim i As Long
    Dim RRP1 As RRP
    Set RRP1 = New RRP 'RRP 类模块引用
    pi = 3.1415926
    pa = pi / 180
    For i = 0 To 3600 '主动件转角 0~360,步长 0.1
        'RR 类模块属性赋值
        f1(i) = i * pa / 10
        RRP1.fj = f1(i)
        RRP1.wj = 20
        RRP1.ej = 0
        RRP1.Lj = 0
```



```

RRP1.Li=100
RRP1.xK=0
RRP1.yK=50
RRP1.vxK=0
RRP1.vyK=0
RRP1.axK=0
RRP1.ayK=0
RRP1.xB=0
RRP1.yB=0
RRP1.vxB=0
RRP1.vyB=0
RRP1.axB=0
RRP1.ayB=0
RRP1.cal '执行 RRP 类模块方法,确定 RR 类模块未知属性
f3(i)=RRP1.fi/pa
w3(i)=RRP1.wi
e3(i)=RRP1.ei
Next i
位移显示.Show '画位移曲线
End Sub

```

(5) 计算结果。构件 3 的转角曲线、角速度曲线及角加速度曲线如图 3-25、图 3-26 及图 3-27 所示。

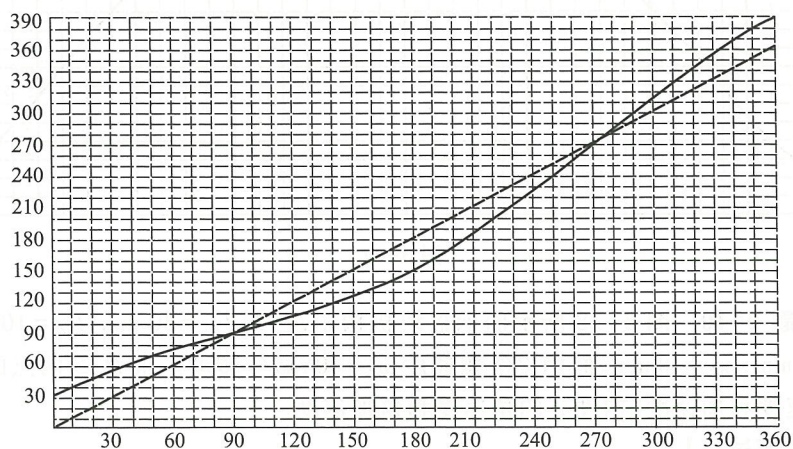


图 3-25

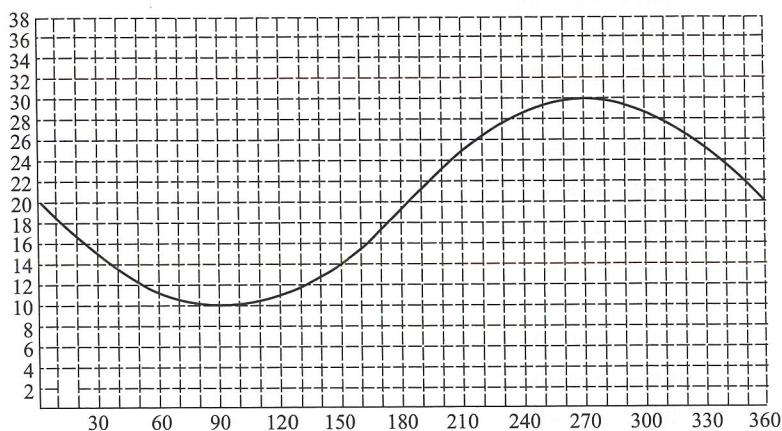


图 3-26

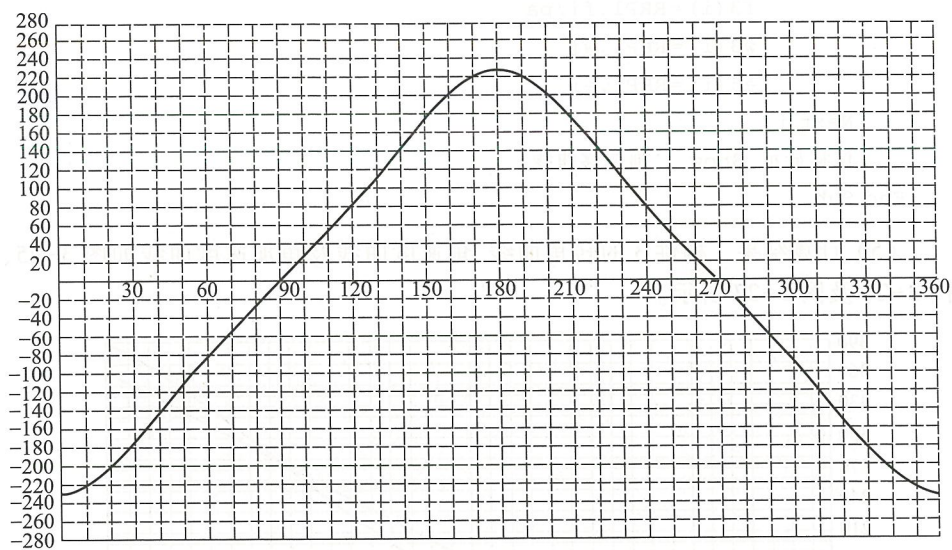
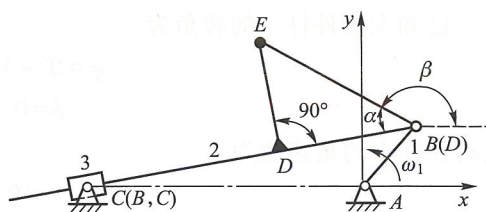
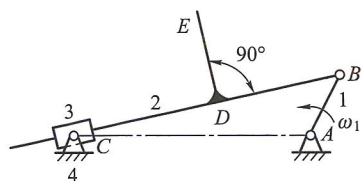


图 3-27

习题 3-10 图 3-28 所示曲柄摇块机构中, 已知 $l_{AB} = 30 \text{ mm}$, $l_{AC} = 100 \text{ mm}$, $l_{BD} = 50 \text{ mm}$, $l_{DE} = 40 \text{ mm}$, 曲柄以等角速度 $\omega_1 = 10 \text{ rad/s}$ 转动。求 D 、 E 两点的运动轨迹、速度和加速度, 构件 3 的角速度和角加速度。

【解题过程】

(1) 建立坐标系。建立以点 A 为原点的固定平面直角坐标系 Axy , 如图 3-29 所示。



(2) 对机构进行结构分析。该机构由 RR 构件(杆 1)和 II 级杆组 RPR(杆 2 及滑块 3)组成。RR 构件如图 3-30a 所示,其几何模型如图 3-30b 所示。II 级杆组 RPR 如图 3-31a 所示。

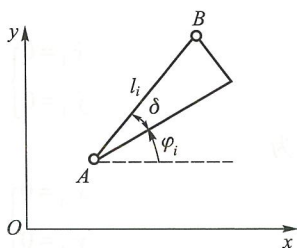
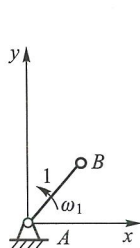
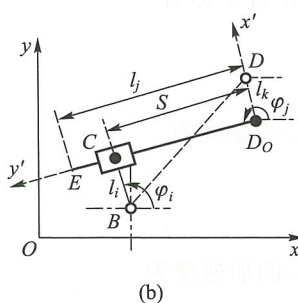
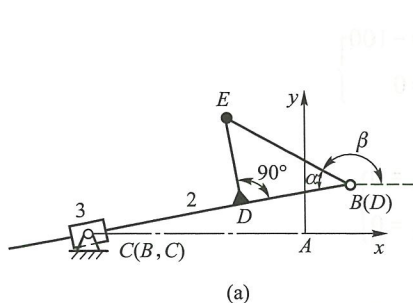


图 3-31b 所示是 II 级杆组 RPR 的几何模型,令 $l_i = l_k = 0$ 时,图 3-31b 所示 II 级杆组 RPR 几何模型与图 3-31a 所示的杆 BC 及滑块 C 杆组的几何模型完全相同。



(3) 确定已知参数和求解流程。

1) 主动件杆 1(RR 构件)

已知主动件杆 1 的转角为

$$\varphi = 0^\circ \sim 360^\circ$$

$$\delta = 0^\circ$$

主动件杆 1 的角速度为

$$\dot{\varphi} = \omega_1 = 10 \text{ rad/s}$$

主动件杆 1 的角加速度为

$$\ddot{\varphi} = 0$$

运动副 A 的位置坐标为

$$\left. \begin{aligned} x_A &= 0 \\ y_A &= 0 \end{aligned} \right\}$$

运动副 A 的速度为

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_A &= 0 \\ \dot{y}_A &= 0 \end{aligned} \right\}$$

运动副 A 的加速度为

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_A &= 0 \\ \ddot{y}_A &= 0 \end{aligned} \right\}$$

主动件杆 1 的长度为

$$l_{AB} = 30 \text{ mm}$$

求出运动副 B 的位置坐标 (x_B, y_B) 、速度 $(\dot{x}_B, \dot{y}_B)$ 和加速度 $(\ddot{x}_B, \ddot{y}_B)$ 。

2) 杆 2 及滑块 3 杆组(Ⅱ级杆组 RPR)

已知运动副 B 的位置 (x_B, y_B) 、速度 $(\dot{x}_B, \dot{y}_B)$ 和加速度 $(\ddot{x}_B, \ddot{y}_B)$, 运动副 C(B) 的位置坐标为

$$\left. \begin{aligned} x_C &= -100 \\ y_C &= 0 \end{aligned} \right\}$$

运动副 C 的速度为

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_C &= 0 \\ \dot{y}_C &= 0 \end{aligned} \right\}$$

运动副 C 的加速度为

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_C &= 0 \\ \ddot{y}_C &= 0 \end{aligned} \right\}$$

且

$$l_i = l_k = 0$$

求出构件 2 的转角 φ_2 、角速度 $\dot{\varphi}_2$ 和角加速度 $\ddot{\varphi}_2$ 。

3) 构件 2 上点 D 的运动

已知运动副 B 的位置坐标 (x_B, y_B) 、速度 $(\dot{x}_B, \dot{y}_B)$ 和加速度 $(\ddot{x}_B, \ddot{y}_B)$ ，构件 2 的转角 φ_2 、角速度 $\dot{\varphi}_2$ 和角加速度 $\ddot{\varphi}_2$ ，杆 BD 的长度 $l_{BD} = 50 \text{ mm}$ 。求出点 D 的位置坐标 (x_D, y_D) 、速度 $(\dot{x}_D, \dot{y}_D)$ 和加速度 $(\ddot{x}_D, \ddot{y}_D)$ 。

4) 构件 2 上点 E 的运动

如图 3-29 所示, EB 与 DB 的夹角为

$$\alpha = \arctan \frac{l_{DE}}{l_{BD}} = \arctan \frac{40}{50}$$

$$\alpha = 38.66^\circ$$

$$\beta = \varphi_2 - \alpha$$

已知 EB 的转角 β 、角速度 $\dot{\varphi}$ 、角加速度 $\ddot{\varphi}$ ，求出点 E 的位置坐标 (x_E, y_E) 、速度 $(\dot{x}_E, \dot{y}_E)$ 和加速度 $(\ddot{x}_E, \ddot{y}_E)$ 。

(4) 用 VB 编程, 程序如下。

```
Public f1(3600) As Double '主动件 1 的转角
Public xD(3600) As Double 'D 点的 x 轴坐标
Public yD(3600) As Double 'D 点的 y 轴坐标
Public xE(3600) As Double 'E 点的 x 轴坐标
Public yE(3600) As Double 'E 点的 y 轴坐标
Public vxD(3600) As Double 'D 点速度的 x 轴分量
Public vyD(3600) As Double 'D 点速度的 y 轴分量
Public vxE(3600) As Double 'E 点速度的 x 轴分量
Public vyE(3600) As Double 'E 点速度的 y 轴分量
Public axD(3600) As Double 'D 点加速度的 x 轴分量
Public ayD(3600) As Double 'D 点加速度的 y 轴分量
Public axE(3600) As Double 'E 点加速度的 x 轴分量
Public ayE(3600) As Double 'E 点加速度的 y 轴分量
Public pi As Double
Public pa As Double
Sub main()
    Dim i As Long
    Dim val As Double
    Dim LBE As Double
    Dim RR1 As RR
    Dim RR2 As RR
```

```

Dim RR3 As RR
Dim RPR1 As RPR
Set RR1 = New RR
Set RR2 = New RR
Set RR3 = New RR
Set RPR1 = New RPR
pi = 3.1415926
pa = pi / 180
For i = 0 To 3600 Step 1
    f1(i) = i * pa / 10
    RR1.xA = 0
    RR1.yA = 0
    RR1.vxA = 0
    RR1.vyA = 0
    RR1.axA = 0
    RR1.aYA = 0
    RR1.f = f1(i)
    RR1.delt = 0
    RR1.w = 10
    RR1.e = 0
    RR1.L = 30
    RR1.cal
    RPR1.Lk = 0
    RPR1.Li = 0
    RPR1.xB = -100
    RPR1.yB = 0
    RPR1.vxB = 0
    RPR1.vyB = 0
    RPR1.axB = 0
    RPR1.aYB = 0
    RPR1.xD = RR1.xB
    RPR1.yD = RR1.yB
    RPR1.vxD = RR1.vxB
    RPR1.vyD = RR1.vyB
    RPR1.axD = RR1.axB
    RPR1.aYD = RR1.aYB
    RPR1.M = -1

```

```
RPR1.cal
RR2.xA=RR1.xB
RR2.yA=RR1.yB
RR2.vxA=RR1.vxB
RR2.vyA=RR1.vyB
RR2.axA=RR1.axB
RR2.ayA=RR1.ayB
RR2.f=RPR1.fj
RR2.w=RPR1.wj
RR2.e=RPR1.ej
RR2.L=50
RR2.cal
xD(i)=RR2.xB
yD(i)=RR2.yB
vxD(i)=RR2.vxB
vyD(i)=RR2.vyB
axD(i)=RR2.axB
ayD(i)=RR2.ayB
RR3.xA=RR1.xB
RR3.yA=RR1.yB
RR3.vxA=RR1.vxB
RR3.vyA=RR1.vyB
RR3.axA=RR1.axB
RR3.ayA=RR1.ayB
val=Atn(40/50)
LBE=Sqr(40 ^ 2 + 50 ^ 2)
RR3.f=RPR1.fj - val
RR3.w=RPR1.wj
RR3.e=RPR1.ej
RR3.L=LBE
RR3.cal
xE(i)=RR3.xB
yE(i)=RR3.yB
vxE(i)=RR3.vxB
vyE(i)=RR3.vyB
axE(i)=RR3.axB
ayE(i)=RR3.ayB
```

```

Next i
位移显示.Show
End Sub

```

(5) 计算结果。点 D 、 E 的运动轨迹、速度线图及加速度线图如图 3-32、图 3-33 及图 3-34 所示。

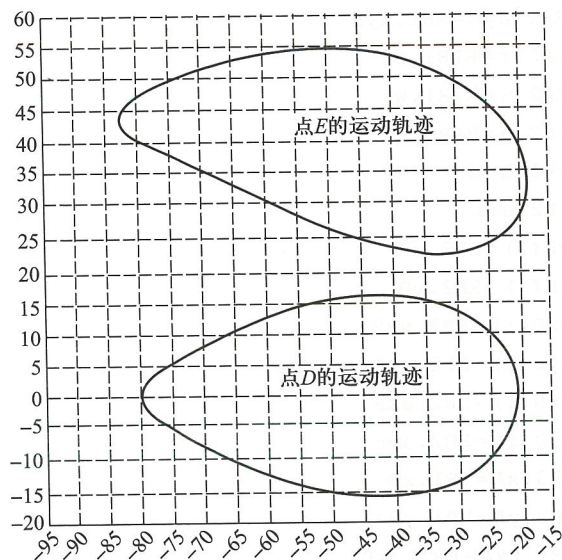


图 3-32

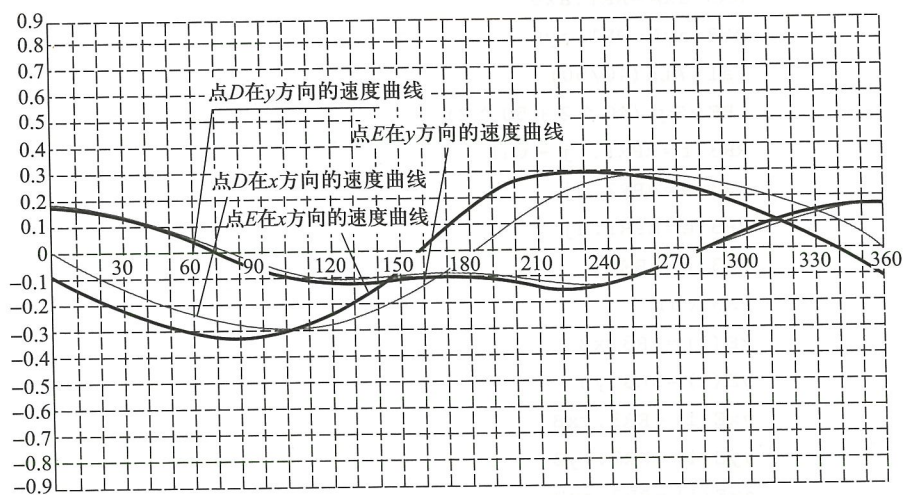


图 3-33

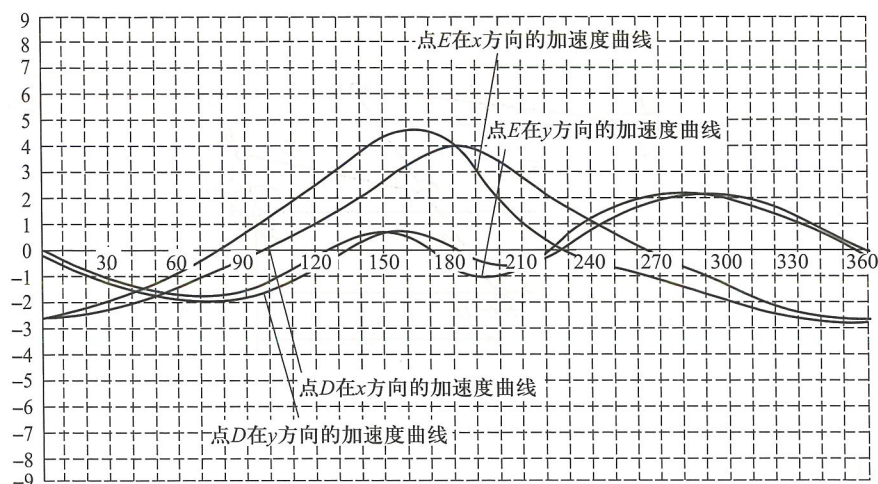


图 3-34

习题 3-11 图 3-35 所示的机构中, 已知 $l_{AB} = 60 \text{ mm}$, $l_{BC} = 180 \text{ mm}$, $l_{DE} = 200 \text{ mm}$, $l_{CD} = 120 \text{ mm}$, $l_{EF} = 300 \text{ mm}$, $h = 80 \text{ mm}$, $h_1 = 85 \text{ mm}$, $h_2 = 225 \text{ mm}$, 构件 1 以等角速度 $\omega_1 = 100 \text{ rad/s}$ 转动。求在一个运动循环中, 滑块 5 的位移、速度和加速度曲线。

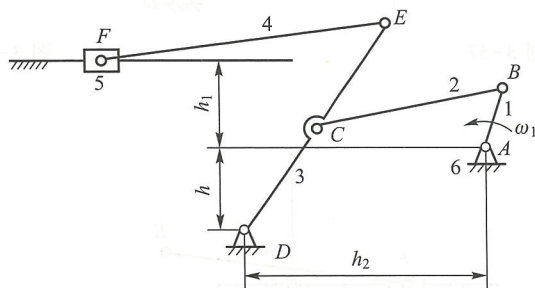


图 3-35

【解题过程】

(1) 建立坐标系。建立以点 D 为原点的固定平面直角坐标系 Dxy , 如图 3-36 所示。

(2) 对机构进行结构分析。该机构由 RR 构件(主动件 AB)、II 级杆组 RRR (杆 2、杆 3) 和 II 级杆组 RRP (杆 4 及滑块 5) 组成。RR 构件如图 3-37 所示, II 级杆组 RRR 如图 3-38 所示, II 级杆组 RRP 如图 3-39 所示。

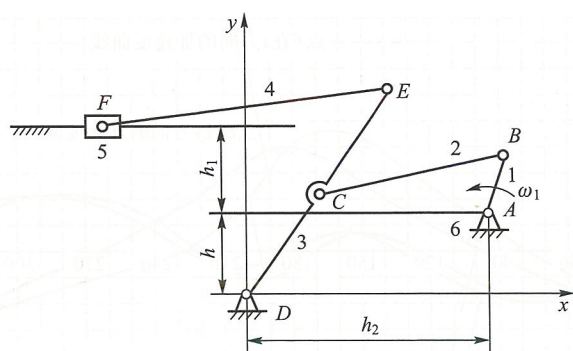


图 3-36

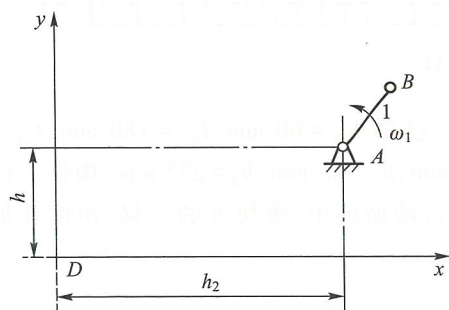


图 3-37

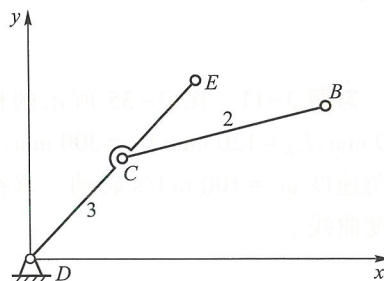


图 3-38

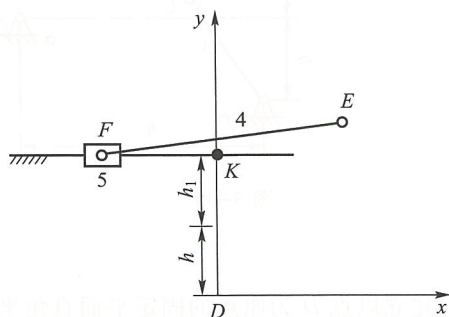


图 3-39

(3) 确定已知参数和求解流程。

1) 主动件杆 1(RR 构件)

如图 3-37 所示,已知主动件杆 1 的转角为

$$\varphi = 0^\circ \sim 360^\circ$$

$$\delta = 0^\circ$$

主动件杆 1 的角速度为

$$\dot{\varphi} = \omega_1 = 100 \text{ rad/s}$$

主动件杆 1 的角加速度为

$$\ddot{\varphi} = \varepsilon = 0$$

运动副 A 的位置坐标为

$$\left. \begin{aligned} x_A &= 225 \text{ mm} \\ y_A &= 80 \text{ mm} \end{aligned} \right\}$$

运动副 A 的速度为

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_A &= 0 \\ \dot{y}_A &= 0 \end{aligned} \right\}$$

运动副 A 的加速度为

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_A &= 0 \\ \ddot{y}_A &= 0 \end{aligned} \right\}$$

主动件杆 1 的长度为

$$l_{AB} = 60 \text{ mm}$$

求出运动副 B 的位置坐标 (x_B, y_B) 、速度 $(\dot{x}_B, \dot{y}_B)$ 和加速度 $(\ddot{x}_B, \ddot{y}_B)$ 。

2) 杆 2、杆 3 杆组 (II 级杆组 RRR)

如图 3-38 所示, 已求出运动副 B 的位置坐标 (x_B, y_B) 、速度 $(\dot{x}_B, \dot{y}_B)$ 和加速度 $(\ddot{x}_B, \ddot{y}_B)$, 已知运动副 D 的位置坐标为

$$\left. \begin{aligned} x_D &= 0 \\ y_D &= 0 \end{aligned} \right\}$$

运动副 D 的速度为

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_D &= 0 \\ \dot{y}_D &= 0 \end{aligned} \right\}$$

运动副 D 的加速度为

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_D &= 0 \\ \ddot{y}_D &= 0 \end{aligned} \right\}$$

杆长为

$$l_{BC} = 180 \text{ mm}$$

$$l_{CD} = 120 \text{ mm}$$

求出构件 3 的转角 φ_3 、角速度 $\dot{\varphi}_3$ 和角加速度 $\ddot{\varphi}_3$ 。

3) 构件 3 上点 E 的运动

如图 3-38 所示, 已知运动副 D 的位置坐标 (x_D, y_D) 、速度 $(\dot{x}_D, \dot{y}_D)$ 和加速度 $(\ddot{x}_D, \ddot{y}_D)$, 已经求出构件 3 的转角 φ_3 、角速度 $\dot{\varphi}_3$ 和角加速度 $\ddot{\varphi}_3$, 杆 DE 的长度 $l_{DE} = 200 \text{ mm}$ 。

根据主动件 AB 的运动分析数学模型求出点 E 的位置坐标 (x_E, y_E) 、速度 $(\dot{x}_E, \dot{y}_E)$ 和加速度 $(\ddot{x}_E, \ddot{y}_E)$ 。

4) 构件 4、构件 5 杆组 (Ⅱ级杆组 RRP)

如图 3-39 所示, 已求出运动副 E 的位置坐标 (x_E, y_E) 、速度 $(\dot{x}_E, \dot{y}_E)$ 和加速度 $(\ddot{x}_E, \ddot{y}_E)$, 已知滑块 5 导路参考点 K 的位置坐标为

$$\left. \begin{array}{l} x_K = 0 \\ y_K = 165 \text{ mm} \end{array} \right\}$$

参考点 K 的位置角为

$$\varphi_j = \pi$$

参考点 K 的速度为

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x}_K = 0 \\ \dot{y}_K = 0 \end{array} \right\}$$

参考点 K 的加速度为

$$\left. \begin{array}{l} \ddot{x}_K = 0 \\ \ddot{y}_K = 0 \end{array} \right\}$$

杆长为

$$l_{EF} = 300 \text{ mm}$$

$$l_j = 0$$

求出滑块 5 的位移 $s(x_F, y_F)$ 、速度 $v(\dot{x}_F, \dot{y}_F)$ 和加速度 $a(\ddot{x}_F, \ddot{y}_F)$ 曲线。

(4) 用 VB 编程, 程序如下。

```
Public s5(3600) As Double
```



```

Public v5(3600) As Double
Public a5(3600) As Double
Public pi As Double
Public pa As Double
Sub main()
    Dim i As Long
    Dim f1(3600) As Double
    Dim RR1 As RR
    Dim RR2 As RR
    Dim RRR1 As RRR
    Dim RRP1 As RRP
    Set RR1 = New RR
    Set RR2 = New RR
    Set RRR1 = New RRR
    Set RRP1 = New RRP
    pi = 3.1415926
    pa = pi / 180
    For i = 0 To 3600 Step 1
        f1(i) = i * pa / 10
        RR1.delt = 0
        RR1.f = f1(i)
        RR1.w = 100
        RR1.e = 0
        RR1.L = 60
        RR1.xA = 225
        RR1.yA = 80
        RR1.vxA = 0
        RR1.vyA = 0
        RR1.axA = 0
        RR1.ayA = 0
        RR1.cal
        RRR1.Li = 120
        RRR1.Lj = 180
        RRR1.xB = 0
        RRR1.yB = 0
        RRR1.vxB = 0
        RRR1.vyB = 0
    
```

```

RRR1.axB=0
RRR1.ayB=0
RRR1.xD=RR1.xB
RRR1.yD=RR1.yB
RRR1.vxD=RR1.vxB
RRR1.vyD=RR1.vyB
RRR1.axD=RR1.axB
RRR1.ayD=RR1.ayB
RRR1.M=1
RRR1.cal
RR2.delt=0
RR2.f=RRR1.fi
RR2.w=RRR1.wi
RR2.e=RRR1.ei
RR2.L=200
RR2.xA=0
RR2.yA=0
RR2.vxA=0
RR2.vyA=0
RR2.axA=0
RR2.ayA=0
RR2.cal
RRP1.Li=300
RRP1.Lj=0
RRP1.fj=pi
RRP1.wj=0
RRP1.ej=0
RRP1.xB=RR2.xB
RRP1.yB=RR2.yB
RRP1.vxB=RR2.vxB
RRP1.vyB=RR2.vyB
RRP1.axB=RR2.axB
RRP1.ayB=RR2.ayB
RRP1.xK=0
RRP1.yK=165
RRP1.vxK=0
RRP1.vyK=0

```

```

RRP1.axK=0
RRP1.ayK=0
RRP1.M=1
RRP1.cal
s5(i)=RRP1.ss
v5(i)=RRP1.vss/1000
a5(i)=RRP1.ass/10000
Next i
位移显示.Show
End Sub

```

(5) 计算结果。滑块5(点F)的位移线图如图3-40所示,速度线图如图3-41所示,加速度线图如图3-42所示。

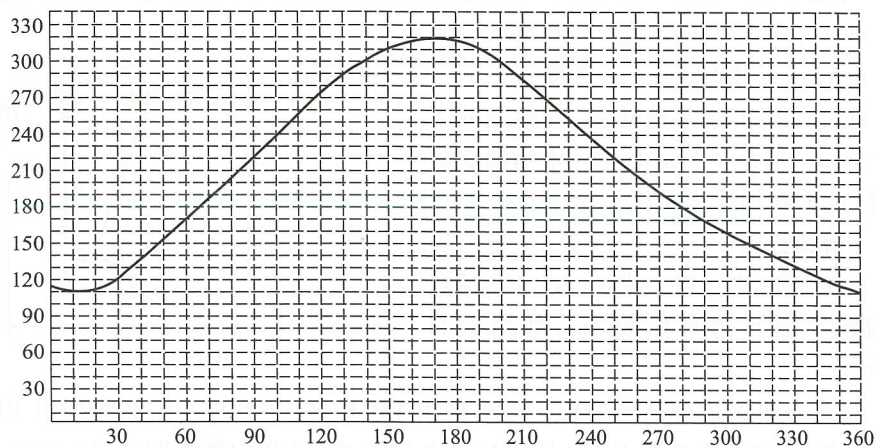


图 3-40

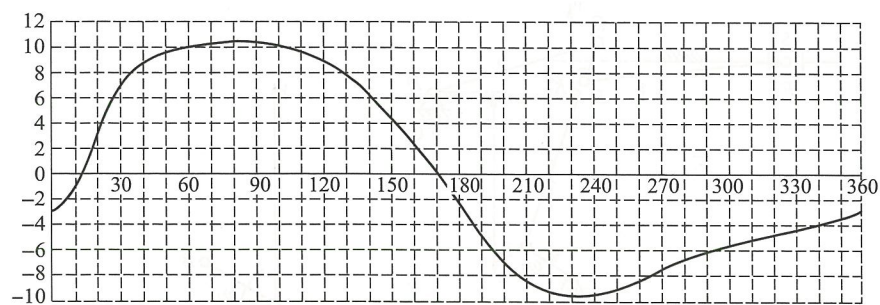


图 3-41

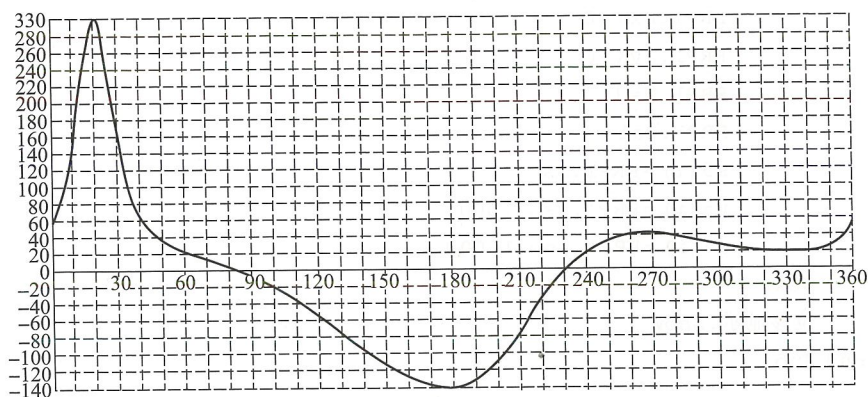


图 3-42

习题 3-12 图 3-43 所示干草压缩机构运动简图中, 已知 $l_{AB} = 150 \text{ mm}$, $l_{BC} = 600 \text{ mm}$, $l_{CE} = 120 \text{ mm}$, $l_{CD} = 500 \text{ mm}$, $l_{EF} = 600 \text{ mm}$, $x_D = 400 \text{ mm}$, $y_D = 500 \text{ mm}$, $y_F = 600 \text{ mm}$, 曲柄 1 作等速转动, 其转速 $n_1 = 50 \text{ r/min}$ 。求在一个运动循环中活塞 5 的位移、速度和加速度曲线。

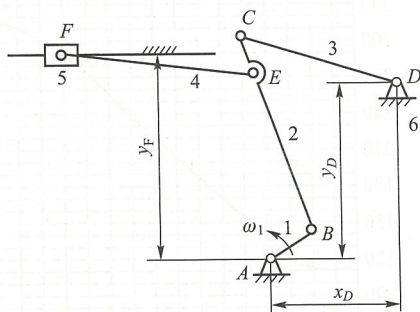


图 3-43

【解题过程】

(1) 建立坐标系。建立以点 A 为原点的固定平面直角坐标系 Axy , 如图 3-44 所示。

(2) 对机构进行结构分析。该机构由 RR 构件 (主动件 1)、II 级杆组 RRR (杆 2、杆 3) 和 II 级杆组 RRP (杆 4 及滑块 5) 组成。RR 构件如图 3-45 所示, II 级杆组 RRR 如图 3-46 所示, II 级杆组 RRP 如图 3-47 所示。

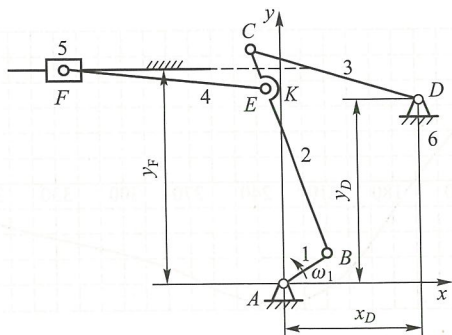


图 3-44

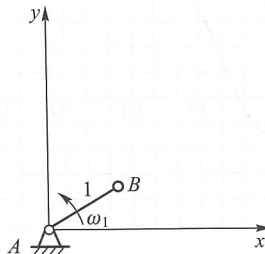


图 3-45

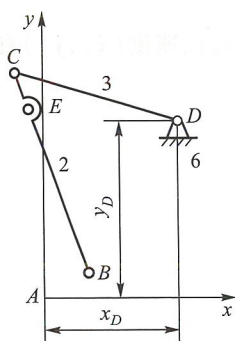


图 3-46

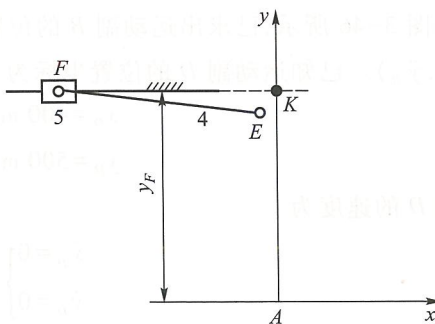


图 3-47

(3) 确定已知参数和求解流程。

1) 主动件杆 1(RR 构件)

如图 3-45 所示, 已知主动件杆 1 的转角为

$$\varphi = 0^\circ \sim 360^\circ$$

$$\delta = 0^\circ$$

主动件杆 1 的角速度为

$$\dot{\varphi} = \omega_1 = \frac{2\pi n_1}{60} = \frac{2 \times 50 \pi}{60} \text{ rad/s} = 5.24 \text{ rad/s}$$

主动件杆 1 的角加速度为

$$\ddot{\varphi} = \varepsilon = 0$$

运动副 A 的位置坐标为

$$\left. \begin{aligned} x_A &= 0 \\ y_A &= 0 \end{aligned} \right\}$$

运动副 A 的速度为

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_A &= 0 \\ \dot{y}_A &= 0 \end{aligned} \right\}$$

运动副 A 的加速度为

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_A &= 0 \\ \ddot{y}_A &= 0 \end{aligned} \right\}$$

主动件杆 1 的长度为

$$l_{AB} = 150 \text{ mm}$$

求出运动副 B 的位置坐标 (x_B, y_B) 、速度 $(\dot{x}_B, \dot{y}_B)$ 和加速度 $(\ddot{x}_B, \ddot{y}_B)$ 。

2) 杆 2、杆 3 杆组(Ⅱ级杆组 RRR)

如图 3-46 所示,已求出运动副 B 的位置坐标 (x_B, y_B) 、速度 $(\dot{x}_B, \dot{y}_B)$ 和加速度 $(\ddot{x}_B, \ddot{y}_B)$ 。已知运动副 D 的位置坐标为

$$\left. \begin{aligned} x_D &= 400 \text{ mm} \\ y_D &= 500 \text{ mm} \end{aligned} \right\}$$

运动副 D 的速度为

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_D &= 0 \\ \dot{y}_D &= 0 \end{aligned} \right\}$$

运动副 D 的加速度为

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_D &= 0 \\ \ddot{y}_D &= 0 \end{aligned} \right\}$$

杆长为

$$l_{BC} = 600 \text{ mm}$$

$$l_{CD} = 500 \text{ mm}$$

求出构件 2 的转角 φ_2 、角速度 $\dot{\varphi}_2$ 和角加速度 $\ddot{\varphi}_2$ 。

3) 构件 3 上点 E 的运动

如图 3-46 所示,已知运动副 B 的位置坐标 (x_B, y_B) 、速度 $(\dot{x}_B, \dot{y}_B)$ 和加速度 $(\ddot{x}_B, \ddot{y}_B)$,已经求出构件 2 的转角 φ_2 、角速度 $\dot{\varphi}_2$ 和角加速度 $\ddot{\varphi}_2$,杆 BE 的长度 $l_{BE} = 480 \text{ mm}$ 。

根据 I 级杆组 RR 的运动分析数学模型求出点 E 的位置坐标 (x_E, y_E) 、速度 $(\dot{x}_E, \dot{y}_E)$ 和加速度 $(\ddot{x}_E, \ddot{y}_E)$ 。

4) 构件 4、滑块 5 杆组(Ⅱ级杆组 RRP)

如图 3-47 所示,已求出运动副 E 的位置坐标 (x_E, y_E) 、速度 $(\dot{x}_E, \dot{y}_E)$ 和加速度 $(\ddot{x}_E, \ddot{y}_E)$,已知滑块 5 导路参考点 K 的位置坐标为

$$\left. \begin{aligned} x_K &= 0 \\ y_K &= 600 \text{ mm} \end{aligned} \right\}$$

参考点 K 的位置角为

$$\varphi_j = \pi$$

参考点 K 的速度为

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_K &= 0 \\ \dot{y}_K &= 0 \end{aligned} \right\}$$

参考点 K 的加速度为

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_K &= 0 \\ \ddot{y}_K &= 0 \end{aligned} \right\}$$

杆长为

$$l_{EF} = 600 \text{ mm}$$

$$l_j = 0$$

求出滑块 5 的位移 $s(x_F, y_F)$ 、速度 $v(\dot{x}_F, \dot{y}_F)$ 和加速度 $a(\ddot{x}_F, \ddot{y}_F)$ 曲线。

(4) 用 VB 编程, 程序如下。

```
Public s5(3600) As Double
Public v5(3600) As Double
Public a5(3600) As Double
Public pi As Double
Public pa As Double
Sub main()
    Dim i As Long
    Dim f1(3600) As Double
    Dim RR1 As RR
    Dim RR2 As RR
    Dim RRR1 As RRR
    Dim RRP1 As RRP
    Set RR1 = New RR
    Set RR2 = New RR
    Set RRR1 = New RRR
    Set RRP1 = New RRP
    pi = 3.1415926
    pa = pi / 180
    For i = 0 To 3600 Step 1
        f1(i) = i * pa / 10
        RR1.delt = 0
        RR1.f = f1(i)
        RR1.w = 5.24
        RR1.e = 0
        RR1.L = 150
        RR1.xA = 0
        RR1.yA = 0
```

```

RR1.vxA=0
RR1.vyA=0
RR1.axA=0
RR1.ayA=0
RR1.cal
RRR1.Li=600
RRR1.Lj=500
RRR1.xB=RR1.xB
RRR1.yB=RR1.yB
RRR1.vxB=RR1.vxB
RRR1.vyB=RR1.vyB
RRR1.axB=RR1.axB
RRR1.ayB=RR1.ayB
RRR1.xD=400
RRR1.yD=500
RRR1.vxD=0
RRR1.vyD=0
RRR1.axD=0
RRR1.ayD=0
RRR1.M=1
RRR1.cal
RR2.delt=0
RR2.f=RRR1.fi
RR2.w=RRR1.wi
RR2.e=RRR1.ei
RR2.L=480
RR2.xA=0
RR2.yA=0
RR2.vxA=0
RR2.vyA=0
RR2.axA=0
RR2.ayA=0
RR2.cal
RRP1.Li=600
RRP1.Lj=0
RRP1.fj=pi
RRP1.wj=0

```



```

RRP1.ej=0
RRP1.xB=RR2.xB
RRP1.yB=RR2.yB
RRP1.vxB=RR2.vxB
RRP1.vyB=RR2.vyB
RRP1.axB=RR2.axB
RRP1.ayB=RR2.ayB
RRP1.xK=0
RRP1.yK=600
RRP1.vxK=0
RRP1.vyK=0
RRP1.axK=0
RRP1.ayK=0
RRP1.M=1
RRP1.cal
s5(i)=RRP1.ss
v5(i)=RRP1.vss
a5(i)=RRP1.ass
Next i
位移显示.Show
End Sub

```

(5) 计算结果。滑块 5(点 F) 的位移线图、速度线图及加速度线图分别如图 3-48、图 3-49 及图 3-50 所示。

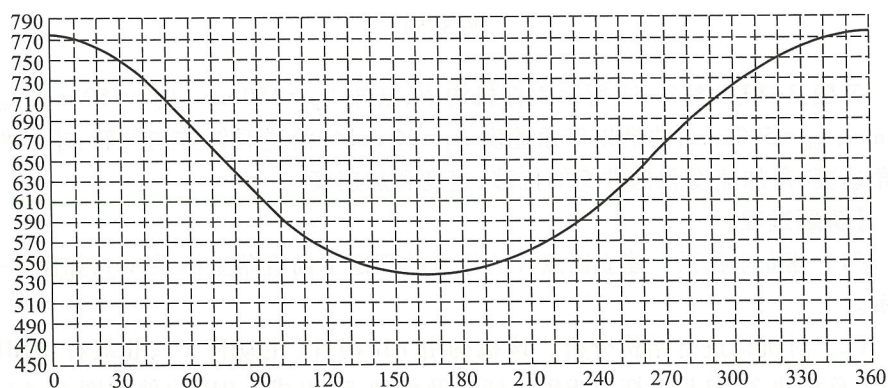


图 3-48

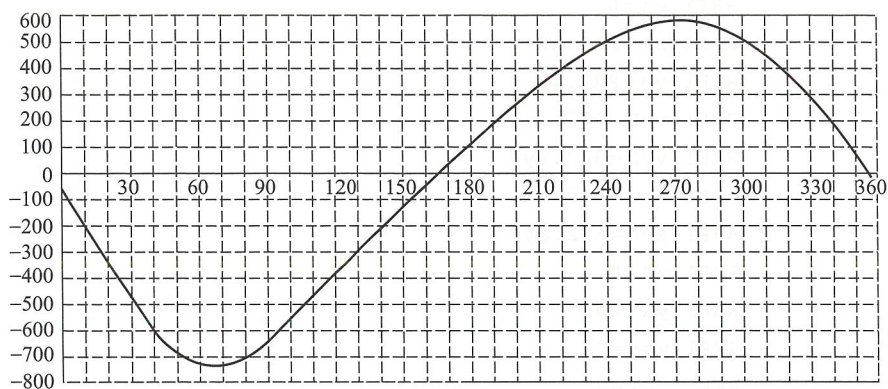


图 3-49

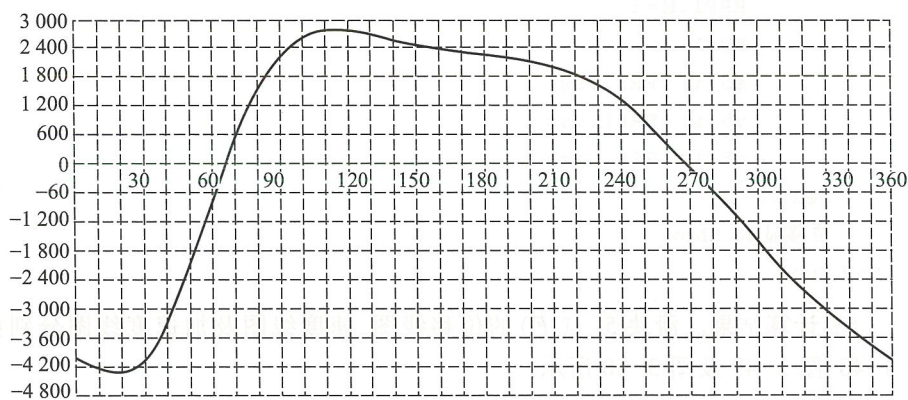


图 3-50

习题 3-13 图 3-51 所示六杆机构中, 已知 $l_{AB} = 150 \text{ mm}$, $l_{AC} = 550 \text{ mm}$, $l_{BD} = 80 \text{ mm}$, $l_{DE} = 500 \text{ mm}$, 曲柄以等角速度 $\omega_1 = 10 \text{ rad/s}$ 沿逆时针方向回转, 求构件 3 的角速度、角加速度和构件 5 的位移、速度和加速度。

【解题过程】

(1) 建立坐标系。建立以点 A 为原点的固定平面直角坐标系 Axy , 如图 3-52 所示。

(2) 对机构进行结构分析。该机构由 RR 构件 (主动件 1)、II 级杆组 RPR (杆 2 及滑块 3) 和 II 级杆组 RRP (杆 4 及滑块 5) 组成。RR 构件如图 3-53 所示, II 级杆组 RPR 如图 3-54 所示, II 级杆组 RRP 如图 3-55 所示。

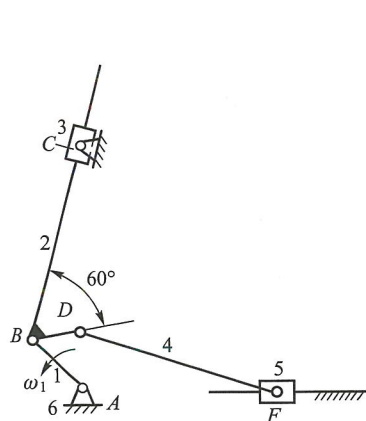


图 3-51

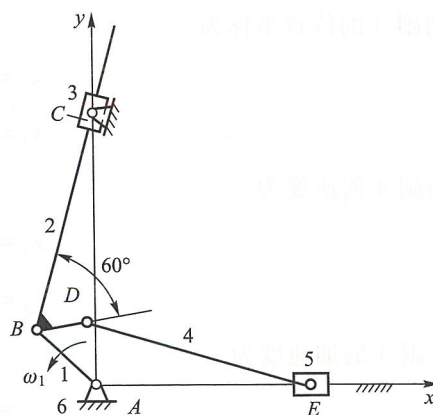


图 3-52

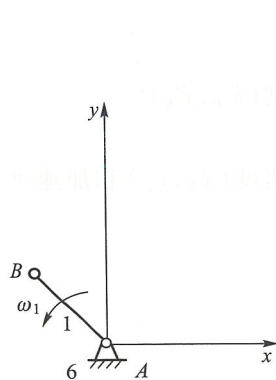


图 3-53

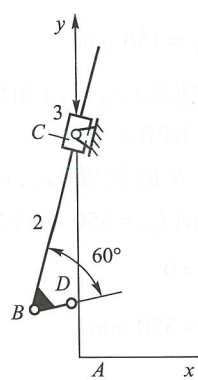


图 3-54

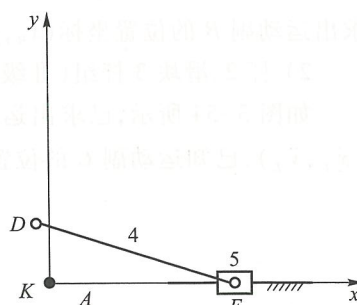


图 3-55

(3) 确定已知参数和求解流程。

1) 主动件杆 1(RR 构件)

如图 3-53 所示, 已知主动件杆 1 的转角为

$$\varphi = 0^\circ \sim 360^\circ$$

$$\delta = 0^\circ$$

主动件杆 1 的角速度为

$$\dot{\varphi} = \omega_1 = 10 \text{ rad/s}$$

主动件杆 1 的角加速度为

$$\ddot{\varphi} = \varepsilon = 0$$

运动副 A 的位置坐标为

$$\left. \begin{aligned} x_A &= 0 \\ y_A &= 0 \end{aligned} \right\}$$

运动副 A 的速度为

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_A &= 0 \\ \dot{y}_A &= 0 \end{aligned} \right\}$$

运动副 A 的加速度为

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_A &= 0 \\ \ddot{y}_A &= 0 \end{aligned} \right\}$$

主动件杆 1 的长度为

$$l_{AB} = 150 \text{ mm}$$

求出运动副 B 的位置坐标 (x_B, y_B) 、速度 $(\dot{x}_B, \dot{y}_B)$ 和加速度 $(\ddot{x}_B, \ddot{y}_B)$ 。

2) 杆 2、滑块 3 杆组 (II 级杆组 RPR)

如图 3-54 所示, 已求出运动副 B 的位置 (x_B, y_B) 、速度 $(\dot{x}_B, \dot{y}_B)$ 和加速度 $(\ddot{x}_B, \ddot{y}_B)$, 已知运动副 C 的位置坐标 $(l_{AC} = 550 \text{ mm})$ 为

$$\left. \begin{aligned} x_C &= 0 \\ y_C &= 550 \text{ mm} \end{aligned} \right\}$$

运动副 C 的速度为

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_C &= 0 \\ \dot{y}_C &= 0 \end{aligned} \right\}$$

运动副 C 的加速度为

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_C &= 0 \\ \ddot{y}_C &= 0 \end{aligned} \right\}$$

杆长为

$$l_i = 0$$

$$l_k = 0$$

求出构件 2 的转角 φ_2 、角速度 $\dot{\varphi}_2$ 和角加速度 $\ddot{\varphi}_2$ 。

3) 构件 2 上点 D 的运动

如图 3-54 所示, 已知运动副 B 的位置坐标 (x_B, y_B) 、速度 $(\dot{x}_B, \dot{y}_B)$ 和加速度 $(\ddot{x}_B, \ddot{y}_B)$, 已经求出构件 2 的转角 φ_2 、角速度 $\dot{\varphi}_2$ 和角加速度 $\ddot{\varphi}_2$, 杆 BD 的长度 $l_{BD} = 80 \text{ mm}$ 。

根据 RR 构件的运动分析数学模型求出点 D 的位置坐标 (x_D, y_D) 、速度 $(\dot{x}_D, \dot{y}_D)$ 和加速度 $(\ddot{x}_D, \ddot{y}_D)$ 。

4) 杆 4、滑块 5 杆组 (II 级杆组 RRP)

如图 3-55 所示, 已求出运动副 D 的位置坐标 (x_D, y_D) 、速度 $(\dot{x}_D, \dot{y}_D)$ 和加速度 $(\ddot{x}_D, \ddot{y}_D)$, 已知滑块 5 导路参考点 K 的位置坐标为

$$\left. \begin{aligned} x_K &= 0 \\ y_K &= 0 \end{aligned} \right\}$$

参考点 K 的位置角为

$$\varphi_j = 0^\circ$$

参考点 K 的速度为

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_K &= 0 \\ \dot{y}_K &= 0 \end{aligned} \right\}$$

参考点 K 的加速度为

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_K &= 0 \\ \ddot{y}_K &= 0 \end{aligned} \right\}$$

杆长为

$$l_{DE} = 500 \text{ mm}$$

$$l_j = 0$$

求出滑块 5 的位移 $s(x_E, y_E)$ 、速度 $v(\dot{x}_E, \dot{y}_E)$ 和加速度 $a(\ddot{x}_E, \ddot{y}_E)$ 曲线。

(4) 用 VB 编程, 程序如下。

```
Public s5(3600) As Double
Public v5(3600) As Double
Public a5(3600) As Double
Public pi As Double
Public pa As Double
Sub main()
    Dim i As Long
```

```

Dim f1(3600) As Double
Dim RR1 As RR
Dim RR2 As RR
Dim RPR1 As RPR
Dim RRP1 As RRP
Set RR1 = New RR
Set RR2 = New RR
Set RPR1 = New RPR
Set RRP1 = New RRP
pi = 3.1415926
pa = pi / 180
For i = 0 To 3600 Step 1
    f1(i) = i * pa / 10
    RR1.delt = 0
    RR1.f = f1(i)
    RR1.w = 10
    RR1.e = 0
    RR1.L = 150
    RR1.xA = 0
    RR1.yA = 0
    RR1.vxA = 0
    RR1.vyA = 0
    RR1.axA = 0
    RR1.ayA = 0
    RR1.cal
    RPR1.Li = 0
    RPR1.Lk = 0
    RPR1.xD = RR1.xB
    RPR1.yD = RR1.yB
    RPR1.vxD = RR1.vxB
    RPR1.vyD = RR1.vyB
    RPR1.axD = RR1.axB
    RPR1.ayD = RR1.ayB
    RPR1.xB = 0
    RPR1.yB = 550
    RPR1.vxB = 0
    RPR1.vyB = 0

```

```
RRP1.axB=0
RRP1.ayB=0
RRP1.M=1
RRP1.cal
RR2.delt=0
RR2.f=RRP1.fj-60*pa
RR2.w=RRP1.wj
RR2.e=RRP1.ej
RR2.L=80
RR2.xA=RR1.xB
RR2.yA=RR1.yB
RR2.vxA=RR1.vxB
RR2.vyA=RR1.vyB
RR2.axA=RR1.axB
RR2.ayA=RR1.ayB
RR2.cal
RRP1.Li=500
RRP1.Lj=0
RRP1.fj=0
RRP1.wj=0
RRP1.ej=0
RRP1.xB=RR2.xB
RRP1.yB=RR2.yB
RRP1.vxB=RR2.vxB
RRP1.vyB=RR2.vyB
RRP1.axB=RR2.axB
RRP1.ayB=RR2.ayB
RRP1.xK=0
RRP1.yK=0
RRP1.vxK=0
RRP1.vyK=0
RRP1.axK=0
RRP1.ayK=0
RRP1.M=1
RRP1.cal
s5(i)=RRP1.ss
v5(i)=RRP1.vss
```

```

a5(i) = RRP1.ass
Next i
位移显示.Show
End Sub

```

(5) 计算结果。滑块 5(点 E) 的位移线图、速度线图及加速度线图如图 3-56、图 3-57 及图 3-58 所示。

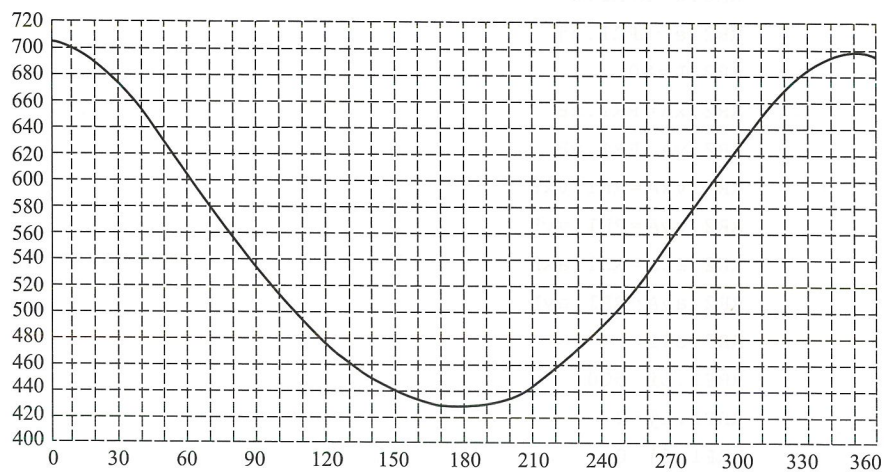


图 3-56

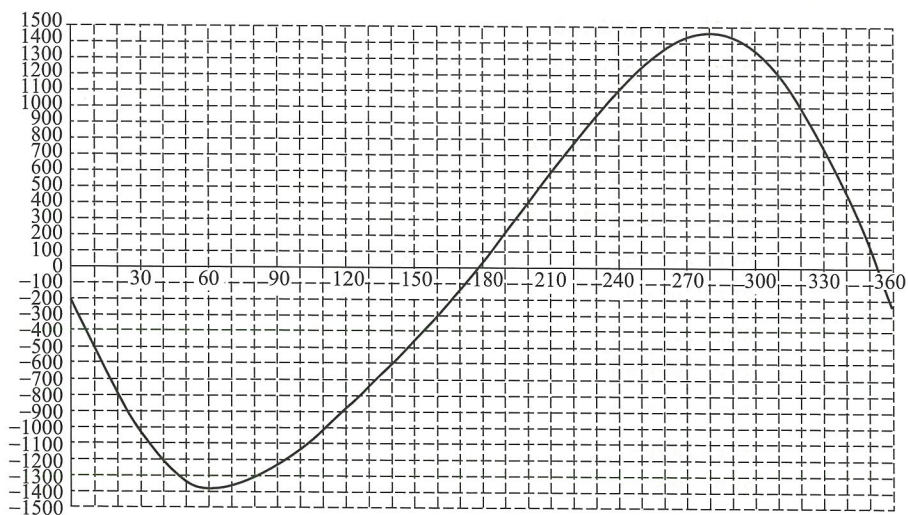


图 3-57

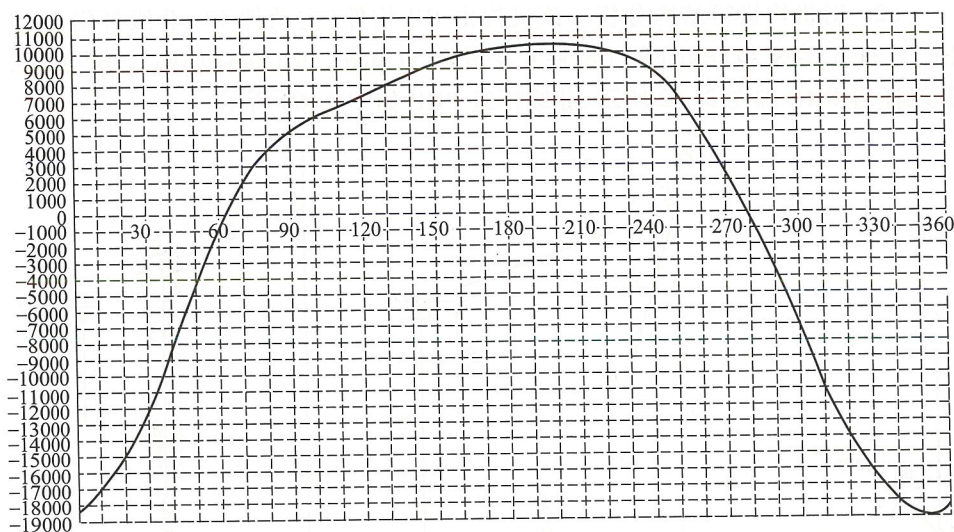


图 3-58

习题 3-14 图 3-59 所示六杆机构中,各构件尺寸分别为 $l_{AB} = 200 \text{ mm}$, $l_{BC} = 500 \text{ mm}$, $l_{CD} = 800 \text{ mm}$, $x_F = 400 \text{ mm}$, $x_D = 750 \text{ mm}$, $y_D = 350 \text{ mm}$, $\omega_1 = 100 \text{ rad/s}$, 求构件 5 上点 F 的位移、速度和加速度。

【解题过程】

(1) 建立坐标系。建立以点 A 为原点的固定平面直角坐标系 Axy , 如图 3-60 所示。

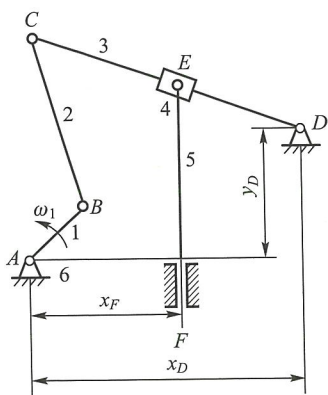


图 3-59

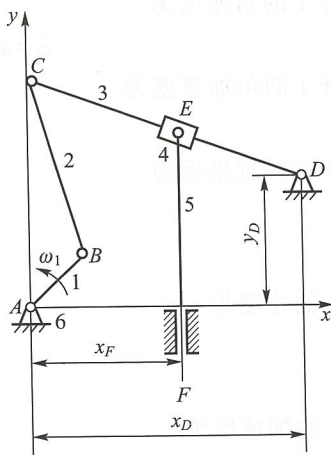


图 3-60

(2) 对机构进行结构分析。该机构由 RR 构件(主动件 1)、Ⅱ级杆组 RRR (杆 2、杆 3)和Ⅱ级杆组 PRP(滑块 4 及滑块 5)组成。RR 构件如图 3-61 所示,Ⅱ级杆组 RRR 如图 3-62 所示,Ⅱ级杆组 PRP 如图 3-63 所示。

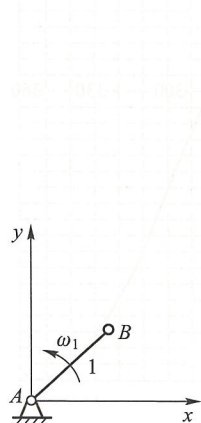


图 3-61

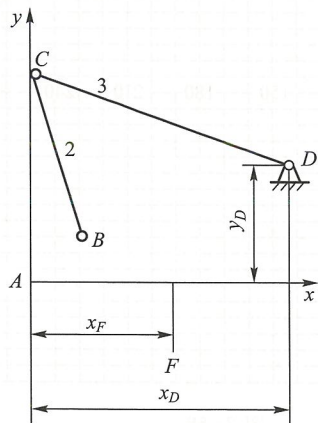


图 3-62

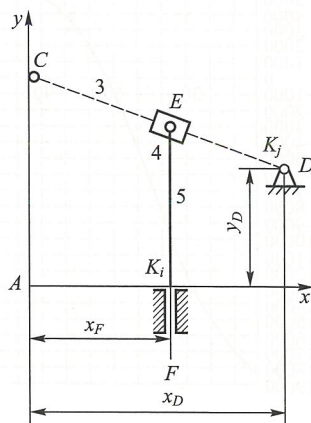


图 3-63

(3) 确定已知参数和求解流程。

1) 主动件杆 1(RR 构件)

如图 3-61 所示,已知主动件杆 1 的转角为

$$\varphi = 0^\circ \sim 360^\circ$$

$$\delta = 0^\circ$$

主动件杆 1 的角速度为

$$\dot{\varphi} = \omega_1 = 100 \text{ rad/s}$$

主动件杆 1 的角加速度为

$$\ddot{\varphi} = \varepsilon = 0$$

运动副 A 的位置坐标为

$$\begin{cases} x_A = 0 \\ y_A = 0 \end{cases}$$

运动副 A 的速度为

$$\begin{cases} \dot{x}_A = 0 \\ \dot{y}_A = 0 \end{cases}$$

运动副 A 的加速度为

$$\begin{cases} \ddot{x}_A = 0 \\ \ddot{y}_A = 0 \end{cases}$$

主动件杆 1 的长度为

$$l_{AB} = 200 \text{ mm}$$

求出运动副 B 的位置坐标 (x_B, y_B) 、速度 $(\dot{x}_B, \dot{y}_B)$ 和加速度 $(\ddot{x}_B, \ddot{y}_B)$ 。

2) 杆 2、杆 3 杆组 (II 级杆组 RRR)

如图 3-62 所示, 已求出运动副 B 的位置坐标 (x_B, y_B) 、速度 $(\dot{x}_B, \dot{y}_B)$ 和加速度 $(\ddot{x}_B, \ddot{y}_B)$, 已知运动副 D 的位置坐标为

$$\left. \begin{aligned} x_D &= 750 \text{ mm} \\ y_D &= 350 \text{ mm} \end{aligned} \right\}$$

运动副 D 的速度为

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_D &= 0 \\ \dot{y}_D &= 0 \end{aligned} \right\}$$

运动副 D 的加速度为

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_D &= 0 \\ \ddot{y}_D &= 0 \end{aligned} \right\}$$

杆长为

$$l_{BC} = 500 \text{ mm}$$

$$l_{CD} = 800 \text{ mm}$$

求出构件 3 的转角 φ_3 、角速度 $\dot{\varphi}_3$ 和角加速度 $\ddot{\varphi}_3$ 。

3) 构件 4、5 杆组 (PRP II 级杆组)

如图 3-63 所示, 已求出滑块 4 导路 DC 的转角 φ_3 、角速度 $\dot{\varphi}_3$ 和角加速度 $\ddot{\varphi}_3$, 已知滑块 4 导路参考点 K_j 的位置坐标为

$$\left. \begin{aligned} x_{K_j} &= 750 \text{ mm} \\ y_{K_j} &= 350 \text{ mm} \end{aligned} \right\}$$

已知滑块 5 导路参考点 K_i 的位置坐标为

$$\left. \begin{aligned} x_{K_i} &= 400 \text{ mm} \\ y_{K_i} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

参考点 K_i 的位置角为

$$\varphi_i = \frac{\pi}{2}$$

参考点 K_i 的速度为

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_{K_i} &= 0 \\ \dot{y}_{K_i} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

参考点 K_i 的加速度为

$$\left. \begin{array}{l} \ddot{x}_{Ki} = 0 \\ \ddot{y}_{Ki} = 0 \end{array} \right\}$$

杆长为

$$l_i = 0$$

$$l_j = 0$$

求出滑块 5 上点 F 的位移 $s(x_F, y_F)$ 、速度 $v(\dot{x}_F, \dot{y}_F)$ 和加速度 $a(\ddot{x}_F, \ddot{y}_F)$ 。

(4) 用 VB 编程, 程序如下。

```
Public s5(3600) As Double
Public v5(3600) As Double
Public a5(3600) As Double
Public pi As Double
Public pa As Double
Sub main()
    Dim i As Long
    Dim f1(3600) As Double
    Dim RR1 As RR
    Dim RRR1 As RRR
    Dim PRP1 As PRP
    Set RR1 = New RR
    Set RRR1 = New RRR
    Set PRP1 = New PRP
    pi = 3.1415926
    pa = pi / 180
    For i = 0 To 3600 Step 1
        f1(i) = i * pa / 10
        RR1.delt = 0
        RR1.f = f1(i)
        RR1.w = 100
        RR1.e = 0
        RR1.L = 0.2
        RR1.xA = 0
        RR1.yA = 0
        RR1.vxA = 0
        RR1.vyA = 0
        RR1.axA = 0
        RR1.ayA = 0
```



```

RR1.cal
RR1.Li=0.5
RR1.Lj=0.8
RR1.xB=RR1.xB
RR1.yB=RR1.yB
RR1.vxB=RR1.vxB
RR1.vyB=RR1.vyB
RR1.axB=RR1.axB
RR1.ayB=RR1.ayB
RR1.xD=0.75
RR1.yD=0.35
RR1.vxD=0
RR1.vyD=0
RR1.axD=0
RR1.ayD=0
RR1.M=1
RR1.cal
PRP1.Li=0
PRP1.Lj=0
PRP1.fj=RR1.fj
PRP1.wj=RR1.wj
PRP1.ej=RR1.ej
PRP1.fi=pi/2
PRP1.wi=0
PRP1.ei=0
PRP1.xKi=0.4
PRP1.yKi=0
PRP1.vxKi=0
PRP1.vyKi=0
PRP1.axKi=0
PRP1.ayKi=0
PRP1.xKj=0.75
PRP1.yKj=0.35
PRP1.vxKj=0
PRP1.vyKj=0
PRP1.axKj=0
PRP1.ayKj=0

```

```

PRP1.cal
s5(i)=(PRP1.ssi-PRP1.xKi)*1000
v5(i)=PRP1.vssi'/1000
a5(i)=PRP1.assi'/1000
Next i
位移显示.Show
End Sub

```

(5) 计算结果。滑块 5(点 F) 的位移线图,速度线图及加速度线图如图 3-64、图 3-65、图 3-66 所示。

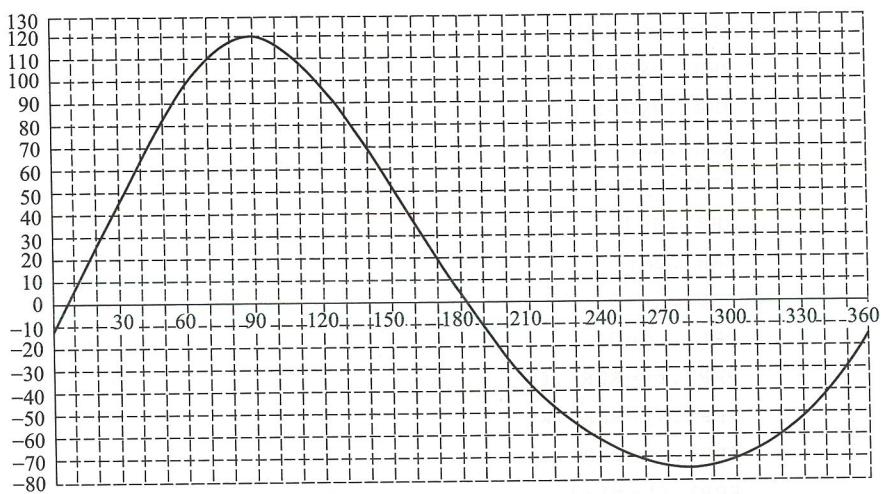


图 3-64

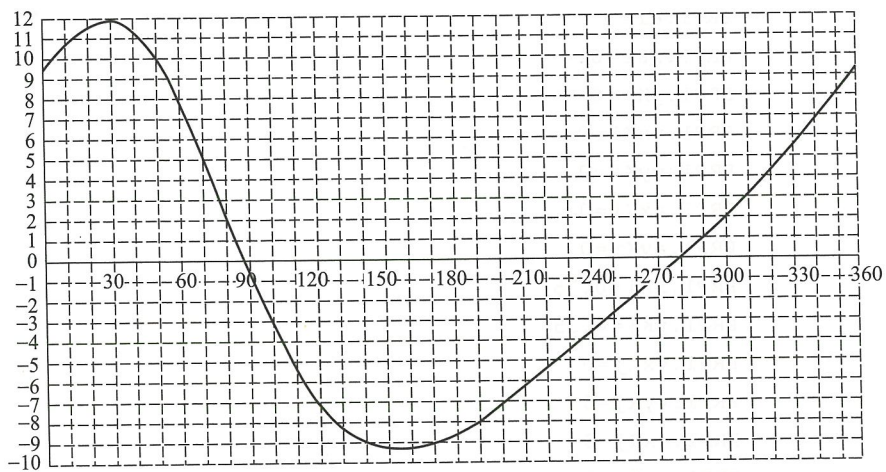


图 3-65

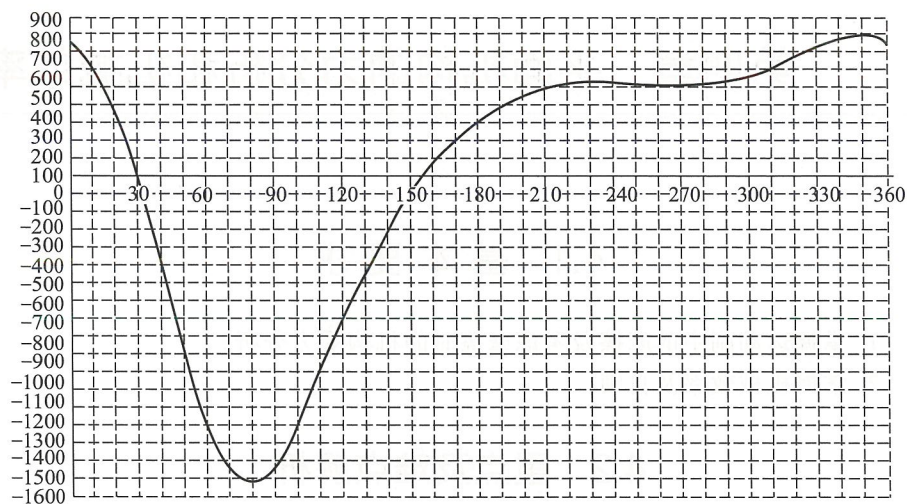


图 3-66

第四章 平面机构的力分析和机械效率

4.1 基本要求

1. 掌握运动副中的摩擦及考虑摩擦时的机构受力分析;
2. 掌握机械效率及自锁。

4.2 重点及难点解析

4.2.1 本章重点

本章重点是机械中的力,移动副和转动副中摩擦的概念,摩擦力或摩擦力矩的计算,计及摩擦时平面机构的受力分析计算,机械效率计算及自锁条件的确定。

4.2.2 本章难点

本章的难点是平面机构中运动副总反力作用线的确定和机械自锁条件的确定。

1. 平面机构中运动副总反力作用线的确定

(1) 移动副总反力作用线的确定

平面移动副、槽面移动副、斜面移动副及螺旋副中的摩擦,都可以转化成平面移动副中的摩擦来考虑,因此摩擦力 F_{f21} 的方向总与滑块相对导路的移动速度 v_{12} 的方向相反,如图 4-1a 所示。总反作用力 F_{R21} 与滑块移动速度方向的夹角为钝角,即 $90^\circ + \varphi$,其中 φ 为摩擦角,其值为

$$\tan \varphi = \frac{F_{f21}}{F_{N21}} = f$$

移动副中摩擦力的大小可以用如下统一公式表示:

$$F_{f21} = f_v G$$

式中, f_v 称为当量摩擦因数, G 为径向载荷。由上式可得当量摩擦角 $\varphi_v = \arctan f_v$ 。
 f_v 可以按下几种情况具体确定。

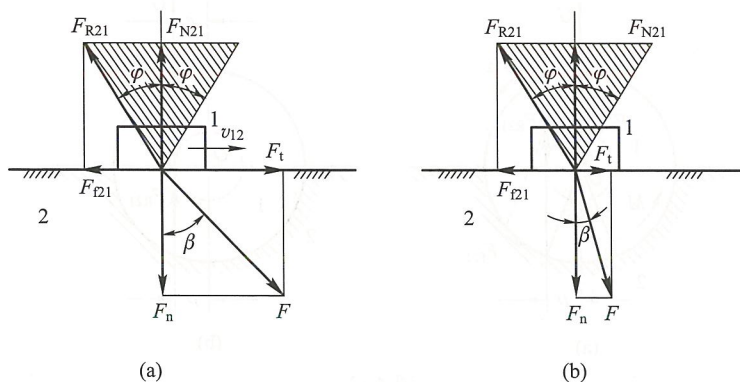


图 4-1

1) 平面移动副中的摩擦: $f_v = f$ 。

2) 槽面移动副中的摩擦: $f_v = \frac{1}{\sin \theta} f$ 。其中, θ 为槽形半角。

3) 斜面移动副中的摩擦: $f_v = \frac{\cos \varphi}{\cos(\lambda \pm \varphi)} f$ 。其中, λ 为斜面倾角; 当滑块沿斜面等速上升时, f_v 表达式的“ $\pm$ ”号取正号; 当滑块沿斜面等速下滑时, f_v 表达式的“ $\pm$ ”号取负号。

4) 矩形螺纹螺旋副中的摩擦: $f_v = \frac{\cos \varphi}{\cos(\lambda \pm \varphi)} f$ 。其中, λ 为螺纹升角; 当拧紧螺母时, f_v 表达式的“ $\pm$ ”号取正号; 当放松螺母时, f_v 表达式的“ $\pm$ ”号取负号。

5) 三角螺纹螺旋副中的摩擦: $f_v = \frac{\cos \varphi'_v}{\cos(\lambda - \varphi'_v)} f$ 。其中, λ 为螺纹升角; $\varphi'_v = \arctan\left(\frac{1}{\cos \beta} f\right)$, β 为三角螺纹的牙形半角; 当拧紧螺母时, f_v 表达式的“ $\pm$ ”号取正号; 当放松螺母时, 表达式的“ $\pm$ ”号取负号。

(2) 径向轴颈与轴承中总反力作用线的确定

因为无论径向轴颈与轴承间是面接触还是线接触, 最终都可以看成是轴颈在驱动力矩 M 、径向载荷 G 、法向反力 F_{N21} 和摩擦力 F_{f21} 作用下平衡。对于一个具体的径向轴颈, 当其受力平衡时, 总反力总是与摩擦圆相切, 其方向应使 F_{R21} 对轴心 O 之矩阻止轴颈 1 相对轴承 2 的运动, 即与 ω_{12} 反向, 如图 4-2a 所示。

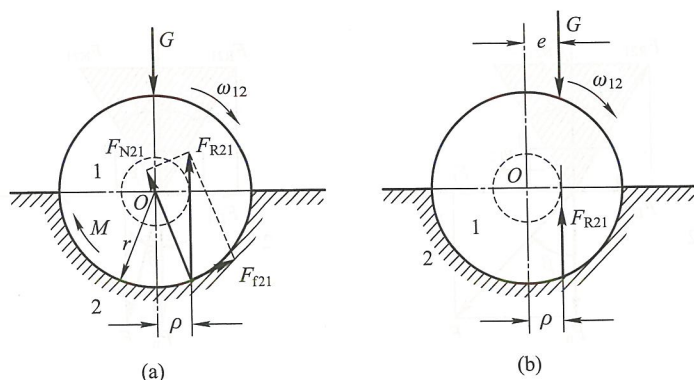


图 4-2

2. 机械自锁条件的确定

(1) 从力的角度研究

1) 移动副的自锁条件

如图 4-1b 所示,当驱动力 F 作用在摩擦锥之内 ($\beta < \varphi$) 时,无论力 F 有多大,都不能推动滑块运动,产生自锁, $\beta < \varphi$ 称为移动副的自锁条件。

2) 径向轴颈与轴承自锁条件

如图 4-2b 所示,当 $e < \rho$ 时, G 作用在摩擦圆以内,无论驱动力 G 增加到多大,因 M 恒小于 M_f ,轴颈都不会转动,这种现象称为径向轴颈与轴承的自锁。因此,径向轴颈与轴承的自锁条件为驱动力作用线在摩擦圆以内,即 $e < \rho$ 。

(2) 从机械效率角度研究

若输入功率小于有害功率 ($P_d < P_f$), 则 $\eta < 0$, 即输入功率引起的有害阻力的功率比输入功率还要大, 所以, 无论输入功率增大多少, 机器都静止不动, 此时, 机器必发生自锁。因此, 从机构效率的角度来看, 机械发生自锁的条件为

$$\eta \leq 0$$

4.3 典型例题分析及解题技巧

例 4-1 图 4-3 所示为一导杆机构, 其中 F_Q 为工作阻力, 已知各轴颈的当量摩擦因数 f_v , 滑块与导路之间的摩擦因数 f , 转动轴径的半径 r , 求在不计各构件的质量和惯性力的情况下应加在曲柄 1 上的驱动力矩 M 。

【解题思路及技巧】

(1) 本题首先要确定各构件的受力情况, 然后从二力构件开始, 分别以各构件为示力体进行分析。

(2) 当一个构件受到三个力作用而平衡时,这三个力必汇交于一点。

【解题过程】

(1) 计算出滑块与导路之间的摩擦角 $\varphi = \arctan f$, 计算各转动副的摩擦圆半径 $\rho = f_v r$, 并画出摩擦圆。

(2) 分析各构件在图 4-3 所示位置时的相对运动趋势。在图 4-3 中, 当曲柄 1 沿顺时针方向转动时, 导杆 3 也沿顺时针方向转动; 滑块 2 沿导杆 3 向下滑动; $\angle ABC$ 有增大的趋势, 即滑块 2 相对于曲柄 1 沿逆时针方向转动。

(3) 分析二力杆滑块 2 的受力。滑块 2 相对于导杆 3 向下滑动, 即 v_{23} 沿导杆向下, 所以 F_{R32} 与 v_{23} 间的夹角为 $90^\circ + \varphi$ 。滑块 2 相对于曲柄 1 沿逆时针方向转动, 所以曲柄 1 作用于滑块 2 的力 F_{R12} 指向右下, 并切于摩擦圆的右上方, 如图 4-4a 所示。

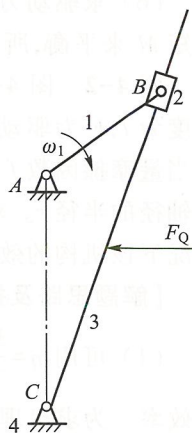


图 4-3

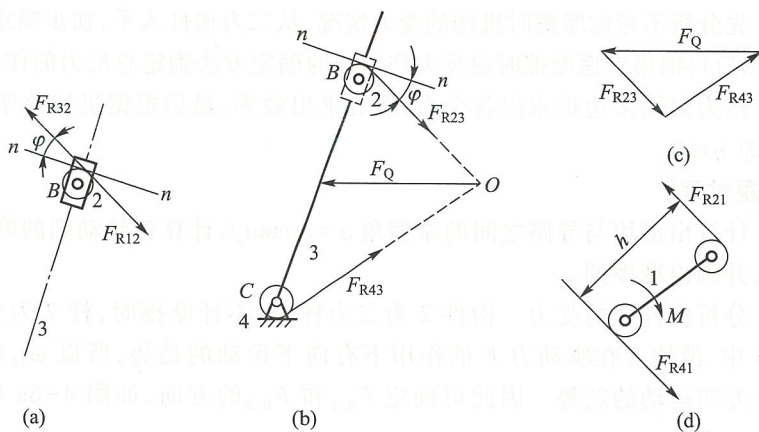


图 4-4

(4) 分析导杆 3 的受力。如图 4-4b 所示, 导杆 3 受三个力的作用, 其中 F_{R23} 与 F_{R32} 的作用点相同, 大小相等, 方向相反; 由于当曲柄 1 沿顺时针方向转动时, 导杆 3 也沿顺时针方向转动, 所以 F_{R43} 与点 C 形成的力矩应阻止导杆 3 沿顺时针方向转动, F_{R43} 切于摩擦圆下方, 指向上方。构件 3 受三个力 F_{R43} 、 F_Q 及 F_{R23} 的作用而平衡, 这三个力应汇交于一点 O, 画力多边形如图 4-4c 所示。根据力 F_Q 可求得 F_{R43} 及 F_{R23} 。再根据 $F_{R32} = -F_{R23}$, $F_{R12} = -F_{R32}$, 求得 F_{R32} 和 F_{R12} 。

(5) 分析曲柄 1 的受力。曲柄 1 受到作用力 F_{R41} 、 F_{R21} 和驱动力矩 M 。 $F_{R21} = -F_{R12}$, $F_{R41} = -F_{R43}$, 且 F_{R41} 与点 A 之矩应阻止构件 1 顺时针转动, 所以 F_{R41} 切于摩擦圆下方, 方向如图 4-4d 所示。

(6) 求驱动力矩 M 。由图 4-4d 可知, F_{R41} 和 F_{R21} 所形成的力偶矩应由驱动力矩 M 来平衡, 所以 $M = F_{R41}h$, 其方向与曲柄 1 的转动方向相同。

例 4-2 图 4-5 所示的双滑块机构中, 杆 AB 的长度为 l , F 为驱动力, F_Q 为工作阻力。已知各轴颈的当量摩擦因数 f_v , 滑块与导路之间的摩擦因数 f , 转动轴径的半径 r 。求在不计各构件的质量和惯性力的情况下该机构的效率和自锁条件。

【解题思路及技巧】

(1) 可用 $\eta = \frac{\text{理想驱动力}}{\text{实际驱动力}} = \frac{\text{理想驱动力矩}}{\text{实际驱动力矩}}$ 计算机

械效率。为求出理想驱动力, 需对机构进行考虑摩擦时的力分析, 所以本题既涉及考虑摩擦时机构的力分析问题, 又涉及机械效率的计算和自锁问题。

(2) 先分析不考虑摩擦时机构的受力情况, 从二力构件入手, 初步确定总反力的方向, 然后再根据考虑摩擦时总反力作用线的确定方法确定总反力的作用线。

(3) 按力封闭多边形求出各个力, 然后求出效率, 最后根据机械效率求出自锁条件, 即 $\eta \leq 0$ 。

【解题过程】

(1) 计算出滑块与导路之间的摩擦角 $\varphi = \arctan f$, 计算各转动副的摩擦圆半径 $\rho = f_v r$, 并画出摩擦圆。

(2) 分析构件 2 的受力。构件 2 为二力杆, 当不计摩擦时, 杆 2 为受压杆。在图 4-5 中, 滑块 3 在驱动力 F 的作用下向下运动的趋势, 所以 ω_{23} 和 ω_{21} 有沿逆时针方向运动的趋势。因此可确定 F_{R32} 和 F_{R12} 的方向, 如图 4-6a 所示, 其中 $\gamma = \arctan\left(\frac{2\rho}{l}\right)$ 。

(3) 分析滑块 3 的受力。滑块 3 在力 F 、 F_{R23} 与 F_{R43} 的作用下平衡, 且这三个力汇交于一点。 F_{R23} 与 F_{R32} 互为作用力与反作用力, 即 $F_{R23} = -F_{R32}$ 。不计摩擦时, 滑块 3 有向下运动的趋势, 所以 F_{R43} 与 v_3 成 $(90^\circ + \varphi)$ 角, 如图 4-6b 所示。作滑块 3 受力的力多边形, 如图 4-6d 左图所示。

(4) 分析滑块 1 的受力。同理, 可确定滑块 1 的受力如图 4-6c 所示。滑块 1 在三个力的作用下平衡, 作力多边形, 如图 4-6d 右图所示。

(5) 求实际驱动力 F 。由图 4-6d, 根据正弦定理可得

$$F_{R23} = \frac{F \sin(90^\circ - \varphi)}{\sin(\alpha + \gamma + \varphi)}$$

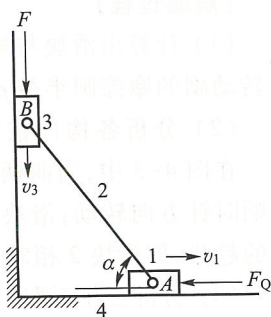


图 4-5

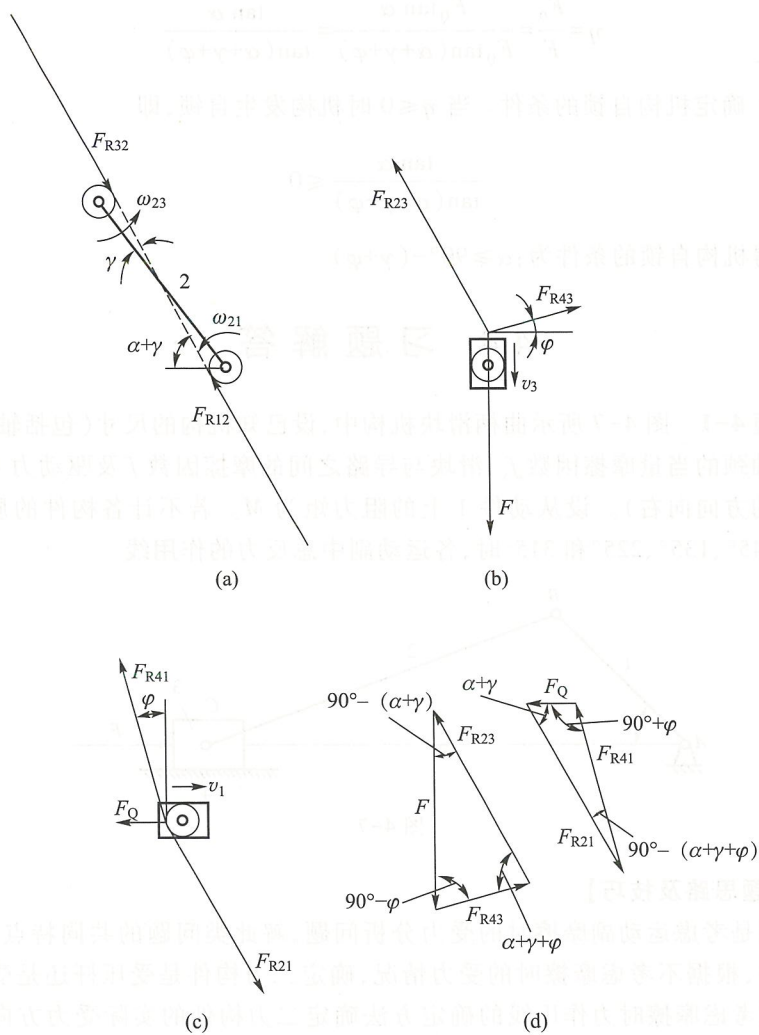


图 4-6

$$F_{R21} = \frac{F_Q \sin(90^\circ + \varphi)}{\sin(90^\circ - \alpha - \gamma - \varphi)}$$

由于 F_{R23} 与 F_{R21} 大小相等, 所以

$$F = \frac{F_Q \sin(\alpha + \gamma + \varphi)}{\cos(\alpha + \gamma + \varphi)} = F_Q \tan(\alpha + \gamma + \varphi)$$

(6) 求效率 η 。对于理想机构 $\varphi = 0$, 则 $\gamma = 0$, 理想驱动力 $F_0 = F_Q \tan \alpha$, 故

$$\eta = \frac{F_0}{F} = \frac{F_Q \tan \alpha}{F_Q \tan(\alpha + \gamma + \varphi)} = \frac{\tan \alpha}{\tan(\alpha + \gamma + \varphi)}$$

(7) 确定机构自锁的条件。当 $\eta \leq 0$ 时机构发生自锁, 即

$$\frac{\tan \alpha}{\tan(\alpha + \gamma + \varphi)} \leq 0$$

从而可得机构自锁的条件为: $\alpha \geq 90^\circ - (\gamma + \varphi)$ 。

4.4 习题解答

习题 4-1 图 4-7 所示曲柄滑块机构中, 设已知机构的尺寸(包括轴颈的直径), 各轴颈的当量摩擦因数 f_v , 滑块与导路之间的摩擦因数 f 及驱动力 F (回程时力 F 的方向向右)。设从动件 1 上的阻力矩为 M 。若不计各构件的质量, 试绘出 $\theta = 45^\circ, 135^\circ, 225^\circ$ 和 315° 时, 各运动副中总反力的作用线。

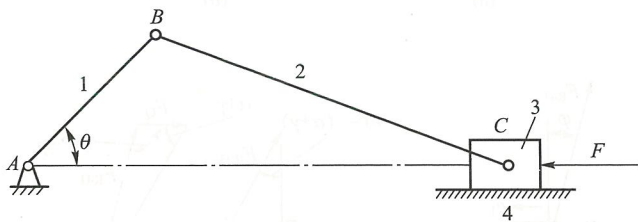


图 4-7

【解题思路及技巧】

本题是考虑运动副摩擦时的受力分析问题, 解此类问题的共同特点是找到二力构件, 根据不考虑摩擦时的受力情况, 确定二力构件是受压杆还是受拉杆, 然后根据考虑摩擦时力作用线的确定方法确定二力构件的实际受力方向, 最后再对与二力构件相连接的构件逐一进行受力分析。

【解题过程】

(1) 根据机构尺寸绘出机构各位置。

(2) 计算出滑块与导路之间的摩擦角 $\varphi = \arctan f$, 计算各转动副的摩擦圆半径 $\rho = f_v r$, 并画出摩擦圆。

(3) 分析连杆 2 的受力。连杆 2 为二力杆, 该杆所受二力大小相等、方向相反、作用在一条直线上。转动副中总反力的作用线切于摩擦圆, 且总反力对转动副中心的力矩总是与相对转动方向相反。

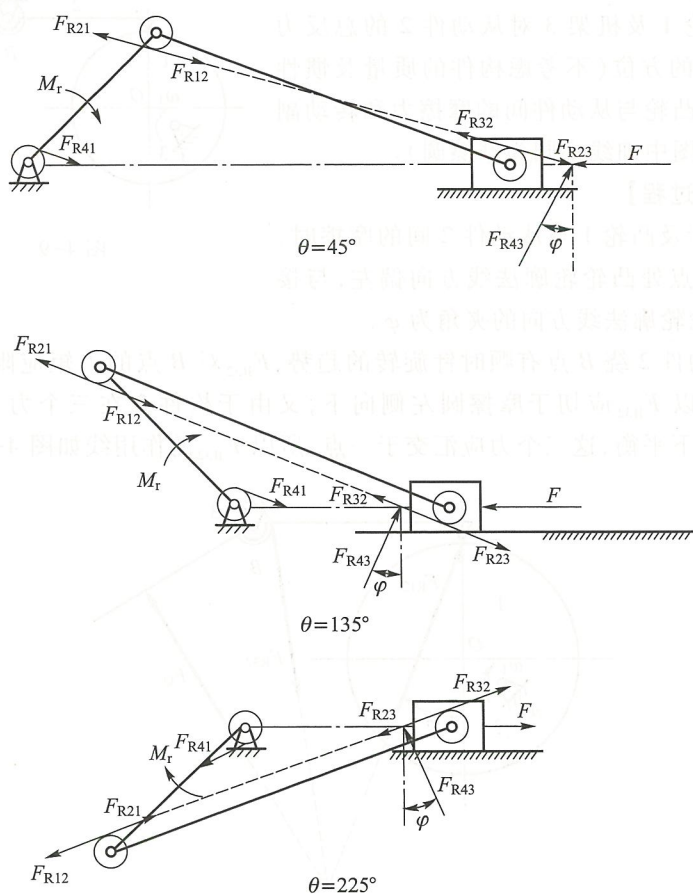
根据机构的位置和驱动力 F 的方向可确定连杆 2 在该位置是受拉或受压,

再根据 $\angle ABC$ 和 $\angle ACB$ 的增减确定构件 2 与其相邻构件之间的相对转动方向, 从而确定总反力应切于摩擦圆的上方还是下方, 最后根据二力共线及切于摩擦圆的条件确定连杆 2 所受力的作用线及方向。

(4) 分析构件 3 的受力。构件 3 受三个力作用, 即驱动力 F 、总反力 F_{R23} 和 F_{R43} , 三个力应交于一点, F_{R23} 和 F_{R32} 大小相等、方向相反且共线, F_{R43} 与速度方向的夹角为 $90^\circ + \varphi$ 。

(5) 分析构件 1 的受力。构件 1 受阻矩 M_r , 总反力 F_{R21} 和 F_{R41} 作用, F_{R21} 和 F_{R12} 大小相等、方向相反且共线。根据平衡条件可知 F_{R41} 与 F_{R21} 应等值、反向, 且构成的力偶矩应等于阻力矩 M_r 。

机构在各个位置的受力情况如图 4-8 所示。



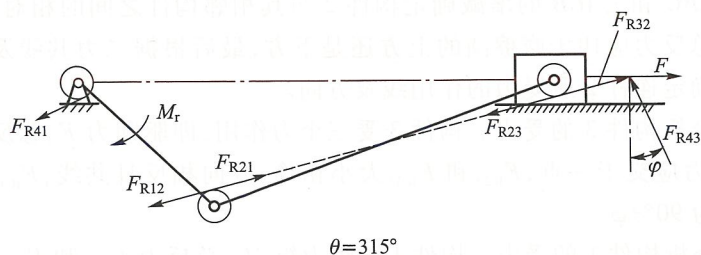


图 4-8

习题 4-2 图 4-9 所示为一摆动从动件盘形凸轮机构, 凸轮 1 沿逆时针方向回转, F_Q 为作用在从动件 2 上的外载荷。试确定凸轮 1 及机架 3 对从动件 2 的总反力 F_{R12} 及 F_{R32} 的方位 (不考虑构件的质量及惯性力, 但计及凸轮与从动件间的摩擦力和转动副的摩擦力, 图中细线小圆为摩擦圆)。

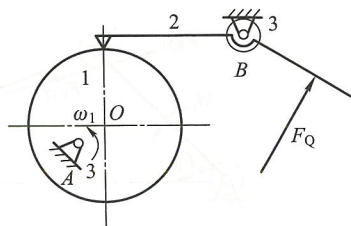


图 4-9

【解题过程】

(1) 计及凸轮 1 与从动件 2 间的摩擦时, F_{R12} 沿接触点处凸轮轮廓法线方向偏左, 与接触点处凸轮轮廓法线方向的夹角为 φ 。

(2) 构件 2 绕 B 点有顺时针旋转的趋势, F_{R32} 对 B 点的力矩应阻止其顺时针转动, 所以 F_{R32} 应切于摩擦圆左侧向下, 又由于构件 3 在三个力 F_Q 、 F_{R12} 和 F_{R32} 的作用下平衡, 这三个力应汇交于一点, 所以 F_{R32} 的作用线如图 4-10 所示。

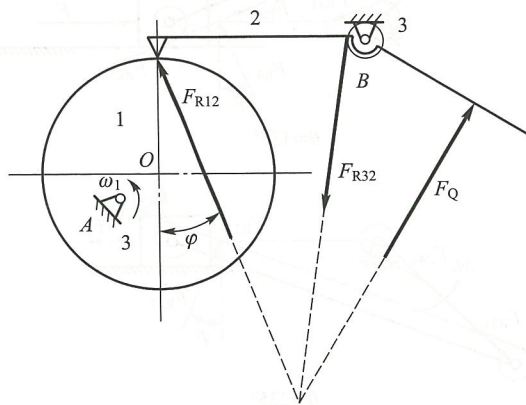


图 4-10

习题 4-3 图 4-11 所示楔块机构中, 已知: $\gamma = \beta = 60^\circ$, $F_Q = 1\,000\text{ N}$, 各接触面摩擦因数 $f = 0.15$ 。如 F_Q 为有效阻力, 试求所需的驱动力 F 。

【解题过程】

(1) 计算摩擦角 $\varphi = \arctan f = \arctan 0.15 = 8.53^\circ$

(2) 在驱动力 F 的作用下, 构件 1 有向下运动的趋势, 构件 2 有向右运动的趋势。按移动副总反力作用线的确定原则——总反力的作用线与运动速度方向成 $90^\circ + \varphi$ 角, 得 F_{R31} 、 F_{R32} 、 F_{R21} 及 F_{R12} 作用线的方向, 如图 4-12a 所示。

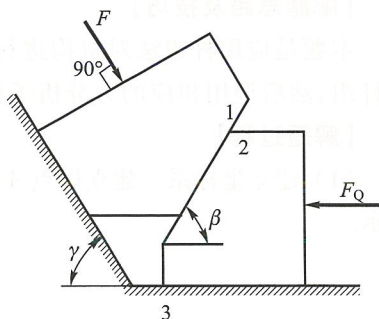
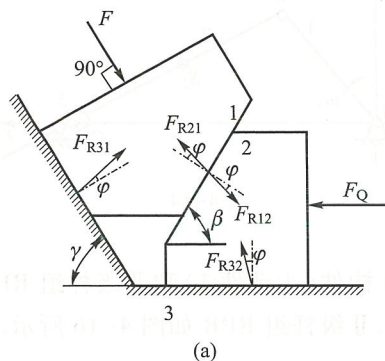
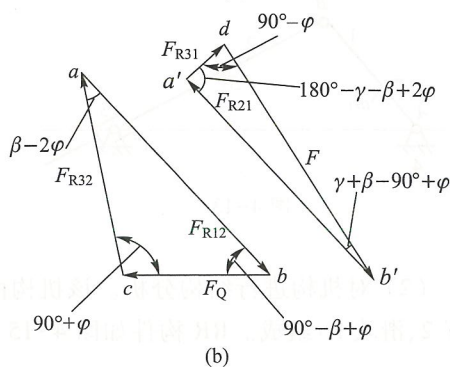


图 4-11



(a)



(b)

图 4-12

(3) 考虑构件 2 的平衡, 根据 $F_{R12} + F_{R32} + F_Q = 0$, 作力三角形 abc , 如图 4-12b 所示。由图可得:

$$F_{R12} = \frac{F_Q}{\sin(\beta - 2\varphi)} \sin(90^\circ + \varphi) = \frac{1\,000\text{ N}}{\sin(60^\circ - 2 \times 8.53^\circ)} \sin(90^\circ + 8.53^\circ) = 1\,451.69\text{ N}$$

(4) 考虑构件 1 的平衡, 根据 $F_{R31} + F_{R21} + F = 0$ 作力三角形 $a'b'd$, 如图 4-12b 所示。由图可得:

$$\begin{aligned} F &= \frac{F_{R21}}{\sin(90^\circ - \varphi)} \sin(180^\circ - \gamma - \beta + 2\varphi) \\ &= \frac{1\,451.69\text{ N}}{\sin(90^\circ - 8.53^\circ)} \sin(180^\circ - 60^\circ - 60^\circ + 2 \times 8.53^\circ) = 1\,430.65\text{ N} \end{aligned}$$

习题 4-4 图 4-13 所示曲柄摇块机构中, 已知各构件尺寸为 $l_{AB} = 100\text{ mm}$, $l_{AC} = 200\text{ mm}$, $l_{BS2} = 86\text{ mm}$; 连杆的质量 $m_2 = 20\text{ kg}$, 连杆对质心 S_2 的转动惯量 $J_{S2} =$

$0.074 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$; 曲柄以等速度 $\omega_1 = 40 \text{ rad/s}$ 转动。试求在一个运动循环中, 各运动副中反力的变化曲线及加在主动件 1 上的平衡力矩的变化曲线。

【解题思路及技巧】

本题是应用杆组法对机构进行受力分析的问题, 解决问题的关键是正确划分杆组, 然后调用相应的力分析子程序, 完成机构的受力分析。

【解题过程】

(1) 建立坐标系。建立以点 A 为原点的固定平面直角坐标系 Axy , 如图 4-14 所示。

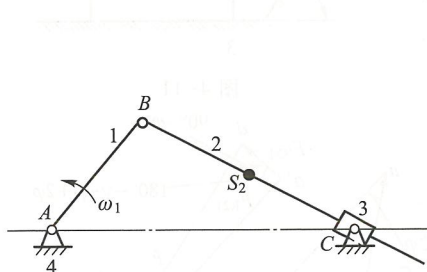


图 4-13

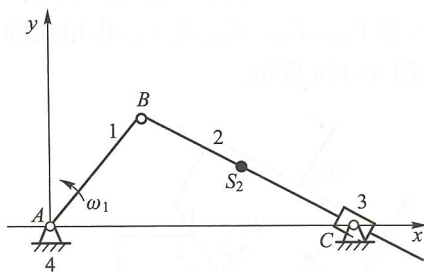


图 4-14

(2) 对机构进行结构分析。该机构由 RR 构件(主动件 1)和 II 级杆组 RPR (杆 2、滑块 3) 组成。RR 构件如图 4-15 所示, II 级杆组 RPR 如图 4-16 所示。

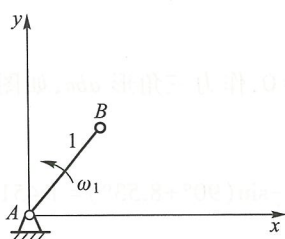


图 4-15

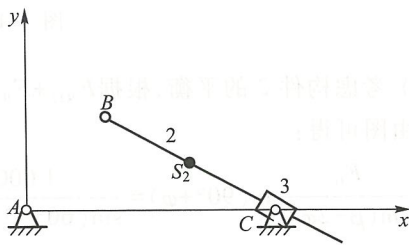


图 4-16

(3) 确定已知参数和求解流程。

1) 主动件杆 1 (RR 构件) 的运动分析

如图 4-15 所示, 已知主动件杆 1 的转角为

$$\varphi = 0^\circ \sim 360^\circ$$

$$\delta = 0^\circ$$

主动件杆 1 的角速度为

$$\dot{\phi} = \omega_1 = 40 \text{ rad/s}$$

主动件杆 1 的角加速度为

$$\ddot{\phi} = \varepsilon = 0$$

运动副 A 的位置坐标为

$$\left. \begin{array}{l} x_A = 0 \\ y_A = 0 \end{array} \right\}$$

运动副 A 的速度为

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x}_A = 0 \\ \dot{y}_A = 0 \end{array} \right\}$$

运动副 A 的加速度为

$$\left. \begin{array}{l} \ddot{x}_A = 0 \\ \ddot{y}_A = 0 \end{array} \right\}$$

主动件杆 1 的长度为

$$l_{AB} = 100 \text{ mm}$$

求出运动副 B 的位置坐标 (x_B, y_B) 、速度 $(\dot{x}_B, \dot{y}_B)$ 和加速度 $(\ddot{x}_B, \ddot{y}_B)$ 。

2) 构件 2、构件 3 杆组 (Ⅱ级杆组 RPR) 的运动分析

如图 4-16 所示, 已求出运动副 B 的位置坐标 (x_B, y_B) 、速度 $(\dot{x}_B, \dot{y}_B)$ 和加速度 $(\ddot{x}_B, \ddot{y}_B)$, 已知运动副 C 的位置坐标为

$$\left. \begin{array}{l} x_C = 200 \text{ mm} \\ y_C = 0 \end{array} \right\}$$

运动副 C 的速度为

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x}_C = 0 \\ \dot{y}_C = 0 \end{array} \right\}$$

运动副 C 的加速度为

$$\left. \begin{array}{l} \ddot{x}_C = 0 \\ \ddot{y}_C = 0 \end{array} \right\}$$

杆长为

$$l_{BS2} = 86 \text{ mm}$$

求出构件 2 的转角 φ_2 、角速度 $\dot{\varphi}_2$ 和角加速度 $\ddot{\varphi}_2$ 及质心 S_2 的位置坐标 (x_{S_2}, y_{S_2}) 、加速度 $(\ddot{x}_{S_2}, \ddot{y}_{S_2})$ 。

3) 构件 2、构件 3 杆组(Ⅱ级杆组 RPR)的力分析

如图 4-16 所示,已求出运动副 B 的位置坐标 (x_B, y_B) ,已知运动副 C 的位置坐标 (x_C, y_C) ,已求出质心 S_2 的位置坐标 (x_{S_2}, y_{S_2}) ,加速度 $(\ddot{x}_{S_2}, \ddot{y}_{S_2})$,已知杆 2 的质量为

$$m_2 = 20 \text{ kg}$$

杆 2 对其质心 S_2 的转动惯量为

$$J_{S_2} = 0.074 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

滑块 3 的质量为

$$m_3 = 0$$

滑块 3 对其质心的转动惯量为

$$J_{S_3} = 0$$

求出滑块 3 与杆 2 移动副 C 的反力 F_{RC23} ,约束力矩 T_{C23} ,转动副 C 的反力 (F_{RxC}, F_{RyC}) 和转动副 B 的反力 (F_{RxB}, F_{RyB}) 。

4) 主动件杆 1(RR 构件)的力分析

如图 4-15 所示,已知运动副 A 的位置坐标 (x_A, y_A) ,已求出运动副 B 的位置坐标 (x_B, y_B) ,和运动副 B 的反力 (F_{RxB}, F_{RyB}) ,求出运动副 A 的反力 (F_{RxA}, F_{RyA}) 和构件 1 上的平衡力矩 T_{y1} 。

(4) 用 VB 编程,程序如下。

```
Public f1(3600) As Double
Public tty(3600) As Double
Public ttc(3600) As Double
Public rrc(3600) As Double
Public rrxA(3600) As Double
Public rryA(3600) As Double
Public rprxB(3600) As Double
Public rpryB(3600) As Double
Public rprxC(3600) As Double
Public rpryC(3600) As Double
Public pi As Double
Public pa As Double
Sub main()
    Dim i As Long
    Dim RR1 As RR
```



```

Dim RRF1 As RRF
Dim RPR1 As RPR
Dim RPRF1 As RPRF
Set RR1 = New RR
Set RRF1 = New RRF
Set RPR1 = New RPR
Set RPRF1 = New RPRF
pi = 3.1415926
pa = pi / 180
For i = 0 To 3600 Step 1
    f1(i) = i * pa / 10
    RR1.f = f1(i)
    RR1.w = 40
    RR1.e = 0
    RR1.delt = 0
    RR1.L = 0.1
    RR1.xA = 0
    RR1.yA = 0
    RR1.cal
    RPR1.Li = 0
    RPR1.Lk = 0
    RPR1.Lj = 0.086
    RPR1.xB = 0.2
    RPR1.yB = 0
    RPR1.vxB = 0
    RPR1.vyB = 0
    RPR1.axB = 0
    RPR1.ayB = 0
    RPR1.xD = RR1.xB
    RPR1.yD = RR1.yB
    RPR1.vxD = RR1.vxB
    RPR1.vyD = RR1.vyB
    RPR1.axD = RR1.axB
    RPR1.a yD = RR1.ayB
    RPR1.m = 1
    RPR1.cal
    RPRF1.xB = RPR1.xB

```

```

RPRF1.yB=RPR1.yB
RPRF1.xD=RPR1.xD
RPRF1.yD=RPR1.yD
RPRF1.mi=0
RPRF1.mj=20
RPRF1.Jsi=0
RPRF1.Jsj=0.074
RPRF1.fj=RPR1.fj
RPRF1.ej=RPR1.ej
RPRF1.ss=RPR1.ss
RPRF1.xsi=RPR1.xB
RPRF1.ysi=RPR1.yB
RPRF1.axsi=RPR1.axB
RPRF1.aysi=RPR1.ayB
RPRF1.xsj=RPR1.xE
RPRF1.ysj=RPR1.yE
RPRF1.axsj=RPR1.axE
RPRF1.aysj=RPR1.ayE
RPRF1.Fxsi=0
RPRF1.Fysi=0
RPRF1.Fxsj=0
RPRF1.Fysj=0
RPRF1.Ti=0
RPRF1.Tj=0
RPRF1.cal
RRF1.m=0
RRF1.Js=0
RRF1.f=RR1.f
RRF1.e=RR1.e
RRF1.xA=RR1.xA
RRF1.yA=RR1.yA
RRF1.xB=RR1.xB
RRF1.yB=RR1.yB
RRF1.xs=0
RRF1.ys=0
RRF1.axs=0
RRF1.ays=0

```

```

RRF1.Fxs=0
RRF1.Fys=0
RRF1.T=0
RRF1.RxB=-RPRF1.RxD
RRF1.RyB=-RPRF1.RyD
RRF1.cal
tty(i)=RRF1.Ty
ttc(i)=RPRF1.TC
rrc(i)=RPRF1.RC
rrxA(i)=RRF1.RxA
rryA(i)=RRF1.RyA
rprxB(i)=RPRF1.RxD
rpryB(i)=RPRF1.RyD
rprxC(i)=RPRF1.RxB
rpryC(i)=RPRF1.RyB

```

```
Next i
```

```
平衡力矩显示.Show
```

```
End Sub
```

(5) 计算结果。构件 1 上的平衡力矩 T_{y1} , 移动副 C 的约束力矩 T_{C23} 的线图如图 4-17 所示。运动副 A 的反力 (F_{RxA}, F_{RyA}), 运动副 B 的反力 (F_{RxB}, F_{RyB}), 转动副 C 的反力 (F_{RxC}, F_{RyC}), 移动副 C 的反力 F_{RC23} 的线图如图 4-18 所示。

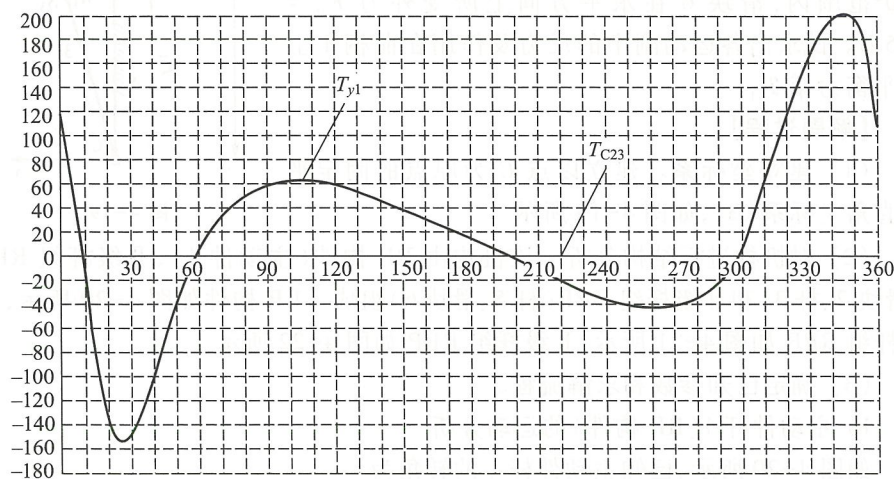


图 4-17

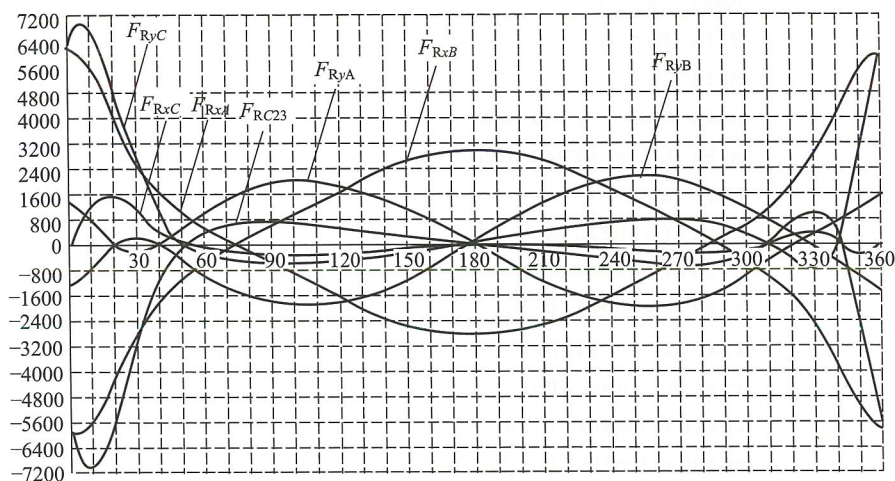


图 4-18

习题 4-5 图 4-19 所示牛头刨床机构中, 已知各构件尺寸为 $l_{AB} = 108 \text{ mm}$, $l_{CE} = 620 \text{ mm}$, $l_{EF} = 300 \text{ mm}$, $l_{CS3} = 320 \text{ mm}$, $l_{ES5} = 150 \text{ mm}$; $H_1 = 350 \text{ mm}$, $H = 635 \text{ mm}$; 各构件的质量及转动惯量分别为 $m_2 = 12 \text{ kg}$, $m_3 = 12 \text{ kg}$, $m_5 = 3 \text{ kg}$, $m_6 = 46 \text{ kg}$, $J_{S3} = 0.04 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, $J_{S5} = 0.0011 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$; 曲柄 1 以等角速度转动, 转速为 $n_1 = 255 \text{ r/min}$ 。设在曲柄转角 $\varphi_1 = 0^\circ \sim 180^\circ$ 范围内, 滑块 6 在水平方向上所受外力 $F_{x6} = 225 \text{ N}$ 。试求出各运动副中的反力及作用在曲柄 1 上的平衡力矩 T_{y1} 。

【解题过程】

(1) 建立坐标系。建立以点 C 为原点的固定平面直角坐标系 Cxy , 如图 4-19 所示。

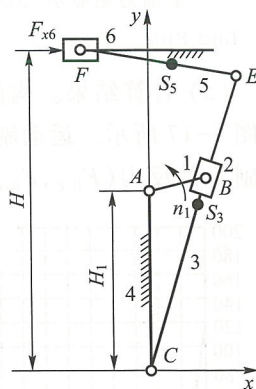


图 4-19

(2) 对机构进行结构分析。该机构由 RR 构件 (主动件 1)、II 级杆组 RPR (滑块 2、杆 3) 和 II 级杆组 RRP (杆 5、滑块 6) 组成。RR 构件如图 4-20 所示, II 级杆组 RPR 如图 4-21 所示, II 级杆组 RRP 如图 4-22 所示。

(3) 确定已知参数和求解流程。

1) 主动件杆 1 (RR 构件) 的运动分析

如图 4-20 所示, 已知主动件杆 1 的转角为

$$\varphi = 0^\circ \sim 180^\circ$$

$$\delta = 0^\circ$$

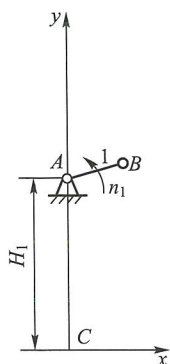


图 4-20

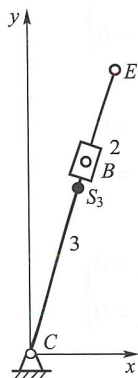


图 4-21

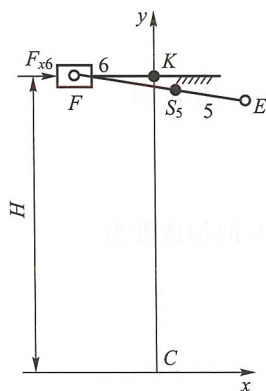


图 4-22

主动件杆 1 的角速度为

$$\dot{\varphi} = \omega_1 = \frac{2\pi n_1}{60} = \frac{2 \times \pi \times 255}{60} \text{ rad/s} = 26.7035 \text{ rad/s}$$

主动件杆 1 的角加速度为

$$\ddot{\varphi} = \varepsilon = 0$$

运动副 A 的位置坐标为

$$\left. \begin{aligned} x_A &= 0 \\ y_A &= 350 \text{ mm} \end{aligned} \right\}$$

运动副 A 的速度为

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_A &= 0 \\ \dot{y}_A &= 0 \end{aligned} \right\}$$

运动副 A 的加速度为

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_A &= 0 \\ \ddot{y}_A &= 0 \end{aligned} \right\}$$

主动件杆 1 的长度为

$$l_{AB} = 108 \text{ mm}$$

求出运动副 B 的位置坐标 (x_B, y_B) 、速度 $(\dot{x}_B, \dot{y}_B)$ 和加速度 $(\ddot{x}_B, \ddot{y}_B)$ 。

2) 构件 2、构件 3 杆组 (II 级杆组 RPR) 的运动分析

如图 4-21 所示, 已求出运动副 B 的位置坐标 (x_B, y_B) 、速度 $(\dot{x}_B, \dot{y}_B)$ 和加速度 $(\ddot{x}_B, \ddot{y}_B)$, 已知运动副 C 的位置坐标为

$$\left. \begin{array}{l} x_C = 0 \\ y_C = 0 \end{array} \right\}$$

运动副 C 的速度为

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x}_C = 0 \\ \dot{y}_C = 0 \end{array} \right\}$$

运动副 C 的加速度为

$$\left. \begin{array}{l} \ddot{x}_C = 0 \\ \ddot{y}_C = 0 \end{array} \right\}$$

杆长为

$$l_{CE} = 620 \text{ mm}$$

求出构件 3 的转角 φ_3 、角速度 $\dot{\varphi}_3$ 和角加速度 $\ddot{\varphi}_3$ 及运动副 E 的位置坐标 (x_E, y_E) 、速度 $(\dot{x}_E, \dot{y}_E)$ 和加速度 $(\ddot{x}_E, \ddot{y}_E)$ 。

3) 构件 5、构件 6 杆组 (II 级杆组 RRP) 的运动分析

如图 4-22 所示, 已求出运动副 E 的位置坐标 (x_E, y_E) 、速度 $(\dot{x}_E, \dot{y}_E)$ 和加速度 $(\ddot{x}_E, \ddot{y}_E)$, 已知滑块 6 导路参考点 K 的位置坐标为

$$\left. \begin{array}{l} x_K = 0 \\ y_K = 635 \text{ mm} \end{array} \right\}$$

参考点 K 的速度为

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x}_K = 0 \\ \dot{y}_K = 0 \end{array} \right\}$$

参考点 K 的加速度为

$$\left. \begin{array}{l} \ddot{x}_K = 0 \\ \ddot{y}_K = 0 \end{array} \right\}$$

杆长为

$$l_{EF} = 300 \text{ mm}$$

求出构件 5 的转角 φ_5 、角速度 $\dot{\varphi}_5$ 和角加速度 $\ddot{\varphi}_5$, 运动副 F 的位置坐标 (x_F, y_F) 、速度 $(\dot{x}_F, \dot{y}_F)$ 和加速度 $(\ddot{x}_F, \ddot{y}_F)$, 滑块 6 的位移 s 、速度 $\dot{s}$ 和加速度 $\ddot{s}$ 。

4) 构件 3 质心 S_3 (RR 构件) 的运动分析

如图 4-21 所示, 已求出杆 3 的转角 φ_3 、角速度 $\dot{\varphi}_3$ 和角加速度 $\ddot{\varphi}_3$, 已知运动副 C 的位置坐标为

$$\left. \begin{array}{l} x_C = 0 \\ y_C = 0 \end{array} \right\}$$

运动副 C 的速度为

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_C &= 0 \\ \dot{y}_C &= 0 \end{aligned} \right\}$$

运动副 C 的加速度为

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_C &= 0 \\ \ddot{y}_C &= 0 \end{aligned} \right\}$$

杆长为

$$l_{CS3} = 320 \text{ mm}$$

求出杆 3 质心 S_3 的位置坐标 (x_{S3}, y_{S3}) 、速度 $(\dot{x}_{S3}, \dot{y}_{S3})$ 和加速度 $(\ddot{x}_{S3}, \ddot{y}_{S3})$ 。

5) 构件 5 质心 S_5 (RR 构件) 的运动分析

如图 4-22 所示, 已求出杆 5 的转角 φ_5 、角速度 $\dot{\varphi}_5$ 和角加速度 $\ddot{\varphi}_5$, 运动副 E 的位置坐标 (x_E, y_E) 、速度 $(\dot{x}_E, \dot{y}_E)$ 和加速度 $(\ddot{x}_E, \ddot{y}_E)$, 已知杆长

$$l_{ES5} = 150 \text{ mm}$$

求出杆 5 质心 S_5 的位置坐标 (x_{S5}, y_{S5}) 、速度 $(\dot{x}_{S5}, \dot{y}_{S5})$ 和加速度 $(\ddot{x}_{S5}, \ddot{y}_{S5})$ 。

6) 构件 5、构件 6 杆组 (II 级杆组 RRP) 的力分析

如图 4-22 所示, 已求出运动副 E 的位置坐标 (x_E, y_E) , 运动副 F 的位置坐标 (x_F, y_F) , 杆 5 质心 S_5 的位置坐标 (x_{S5}, y_{S5}) 和加速度 $(\ddot{x}_{S5}, \ddot{y}_{S5})$, 已知杆 5 的质量为

$$m_5 = 3 \text{ kg}$$

杆 5 对其质心 S_5 的转动惯量为

$$J_{S5} = 0.0011 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

滑块 6 的质量为

$$m_6 = 46 \text{ kg}$$

滑块 6 对其质心的转动惯量为

$$J_{S6} = 0$$

滑块 6 所受外力为

$$F_{x6} = 225 \text{ N}$$

求出滑块 6 与导路移动副 F 的反力 F_{RF46} , 约束力矩 T_{F46} , 转动副 F 的反力 (F_{RxF}, F_{RyF}) 和转动副 E 的反力 (F_{RxE}, F_{RyE}) 。

7) 构件 3 (三副构件) 的力分析

如图 4-21 所示, 已求出运动副 E 的位置坐标 (x_E, y_E) , 运动副 E 的反力 (F_{RxE}, F_{RyE}) 和杆 3 质心 S_3 的位置坐标 (x_{S3}, y_{S3}) , 把运动副 E 的反力 (F_{RxE}, F_{RyE}) 化简为作用在杆 3 质心 S_3 的外力 (F_{xS3}, F_{yS3}) 和外力矩 T 。

8) 构件 2、构件 3 杆组(Ⅱ级杆组 RPR)的力分析

如图 4-21 所示,已求出运动副 B 的位置坐标 (x_B, y_B) , 杆 3 质心 S_3 的位置坐标 (x_{S3}, y_{S3}) 、加速度 $(\ddot{x}_{S3}, \ddot{y}_{S3})$, 杆 3 的转角 φ_3 和角加速度 $\ddot{\varphi}_3$, 作用在杆 3 质心 S_3 的外力 (F_{xS3}, F_{yS3}) 和外力矩 T , 已知运动副 C 的位置坐标为

$$\left. \begin{array}{l} x_C = 0 \\ y_C = 0 \end{array} \right\}$$

杆 3 的质量为

$$m_3 = 12 \text{ kg}$$

滑块 2 的质量为

$$m_2 = 12 \text{ kg}$$

杆 3 对其质心 S_3 的转动惯量为

$$J_{S3} = 0.04 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

滑块 2 对其质心 S_2 的转动惯量为

$$J_{S2} = 0$$

求出滑块 2 与杆 3 移动副 B 的反力 F_{RB23} , 约束力矩 T_{B23} , 转动副 B 的反力 (F_{RxB}, F_{RyB}) 和转动副 C 的反力 (F_{RxC}, F_{RyC}) 。

9) 主动件杆 1(RR 构件) 的力分析

如图 4-20 所示,已求出运动副 B 的位置坐标 (x_B, y_B) , 和运动副 B 的反力 (F_{RxB}, F_{RyB}) , 已知运动副 A 的位置坐标为

$$\left. \begin{array}{l} x_A = 0 \\ y_A = 350 \text{ mm} \end{array} \right\}$$

杆 1 的角加速度为

$$\ddot{\varphi}_1 = 0$$

求出运动副 A 的反力 (F_{RxA}, F_{RyA}) 和构件 1 上的平衡力矩 T_{y1} 。

(4) 用 VB 编程,程序如下。

```
Public f1(3600) As Double
Public tty(3600) As Double
Public tb23(3600) As Double
Public rb23(3600) As Double
Public rf6(3600) As Double
Public rrxA(3600) As Double
Public rryA(3600) As Double
```



```

Public rrxB(3600) As Double
Public rryB(3600) As Double
Public rprxC(3600) As Double
Public rpryC(3600) As Double
Public rrpxE(3600) As Double
Public rrrpyE(3600) As Double
Public rrpxF(3600) As Double
Public rrrpyF(3600) As Double
Public g As Double
Public pi As Double
Public pa As Double

Sub main()
    Dim i As Long
    Dim RR1 As RR
    Dim RR2 As RR
    Dim RR3 As RR
    Dim RRF1 As RRF
    Dim RPR1 As RPR
    Dim RPRF1 As RPRF
    Dim RRP1 As RRP
    Dim RRPF1 As RRPF
    Dim ABCF1 As ABCF
    Set RR1 = New RR
    Set RR2 = New RR
    Set RR3 = New RR
    Set RRF1 = New RRF
    Set RPR1 = New RPR
    Set RPRF1 = New RPRF
    Set RRP1 = New RRP
    Set RRPF1 = New RRPF
    Set ABCF1 = New ABCF
    pi = 3.1415926
    pa = pi / 180
    g = 9.81
    For i = 0 To 1800 Step 1
        f1(i) = i * pa / 10
        RR1.f = f1(i)
    
```

```
RR1.w=2*pi*255/60
RR1.e=0
RR1.delt=0
RR1.L=0.108
RR1.xA=0
RR1.yA=0.35
RR1.cal
RPR1.Li=0
RPR1.Lk=0
RPR1.Lj=0.62
RPR1.xB=RR1.xB
RPR1.yB=RR1.yB
RPR1.vxB=RR1.vxB
RPR1.vyB=RR1.vyB
RPR1.axB=RR1.axB
RPR1.a yB=RR1.a yB
RPR1.xD=0
RPR1.yD=0
RPR1.vxD=0
RPR1.vyD=0
RPR1.axD=0
RPR1.a yD=0
RPR1.m=1
RPR1.cal
RR2.xA=RPR1.xD
RR2.yA=RPR1.yD
RR2.vxA=RPR1.vxD
RR2.vyA=RPR1.vyD
RR2.axA=RPR1.axD
RR2.a yA=RPR1.a yD
RR2.delt=0
RR2.f=RPR1.fj
RR2.w=RPR1.wj
RR2.e=RPR1.ej
RR2.L=0.32
RR2.cal
RRP1.xB=RPR1.xE
```

```

RRP1.yB=RRP1.yE
RRP1.vxB=RRP1.vxE
RRP1.vyB=RRP1.vyE
RRP1.axB=RRP1.axE
RRP1.ayB=RRP1.ayE
RRP1.Li=0.3
RRP1.Lj=0
RRP1.xK=0
RRP1.yK=0.635
RRP1.vxK=0
RRP1.vyK=0
RRP1.axK=0
RRP1.ayK=0
RRP1.fj=pi
RRP1.wj=0
RRP1.ej=0
RRP1.m=1
RRP1.cal
RR3.xA=RRP1.xB
RR3.yA=RRP1.yB
RR3.vxA=RRP1.vxB
RR3.vyA=RRP1.vyB
RR3.axA=RRP1.axB
RR3.ayA=RRP1.ayB
RR3.delt=0
RR3.f=RRP1.fi
RR3.w=RRP1.wi
RR3.e=RRP1.ei
RR3.L=0.15
RR3.cal
RRPF1.xB=RRP1.xB
RRPF1.yB=RRP1.yB
RRPF1.xsi=RR3.xB
RRPF1.ysi=RR3.yB
RRPF1.axsi=RR3.axB
RRPF1.aysi=RR3.ayB
RRPF1.ei=RR3.e

```

```

RRPF1.mi=3
RRPF1.Jsi=0.0011
RRPF1.Fxsi=0
RRPF1.Fysi=0
RRPF1.Ti=0
RRPF1.xsj=RRP1.xD
RRPF1.ysj=RRP1.yD
RRPF1.axsj=RRP1.axD
RRPF1.aysj=RRP1.ayD
RRPF1.ej=0
RRPF1.mj=46
RRPF1.Jsj=0
RRPF1.Fxsj=225
RRPF1.Fysj=0
RRPF1.Tj=0
RRPF1.xC=RRP1.xC
RRPF1.yC=RRP1.yC
RRPF1.xD=RRP1.xD
RRPF1.yD=RRP1.yD
RRPF1.fj=RRP1.fj
RRPF1.cal
RPRF1.xB=RR1.xB
RPRF1.yB=RR1.yB
RPRF1.ss=RPR1.ss
RPRF1.xD=RPR1.xD
RPRF1.yD=RPR1.yD
RPRF1.xsi=RR1.xB
RPRF1.ysi=RR1.yB
RPRF1.axsi=RR1.axB
RPRF1.aysi=RR1.ayB
RPRF1.xsj=RR2.xB
RPRF1.ysj=RR2.yB
RPRF1.axsj=RR2.axB
RPRF1.aysj=RR2.ayB
RPRF1.fj=RPR1.fj
RPRF1.ej=RPR1.ej
RPRF1.mi=12

```



```

RPRF1.Jsi=0
RPRF1.mj=12
RPRF1.Jsj=0.04
RPRF1.Fxsi=0
RPRF1.Fysi=0
RPRF1.Ti=0
ABCF1.xs=RR2.xB
ABCF1.ys=RR2.yB
ABCF1.xC=RPR1.xE
ABCF1.yC=RPR1.yE
ABCF1.TwC=0
ABCF1.Fxs0=0
ABCF1.Fys0=0
ABCF1.T0=0
ABCF1.FxC=-RPRF1.RxB
ABCF1.FyC=-RPRF1.RyB
ABCF1.cal
RPRF1.Fxsj=ABCF1.Fxs
RPRF1.Fysj=ABCF1.Fys
RPRF1.Tj=ABCF1.T
RPRF1.cal
RRF1.m=0
RRF1.Js=0
RRF1.f=RR1.f
RRF1.e=RR1.e
RRF1.xA=RR1.xA
RRF1.yA=RR1.yA
RRF1.xB=RR1.xB
RRF1.yB=RR1.yB
RRF1.xs=0
RRF1.ys=0
RRF1.axs=0
RRF1.ays=0
RRF1.Fxs=0
RRF1.Fys=0
RRF1.T=0
RRF1.RxB=-RPRF1.RxD

```

```

RRF1.RyB = -RPRF1.RyD
RRF1.cal
tty(i) = RRF1.Ty
rrxA(i) = RRF1.RxA
rryA(i) = RRF1.RyA
rrxB(i) = RPRF1.RxB
rryB(i) = RPRF1.RyB
tb23(i) = RPRF1.TC
rb23(i) = RPRF1.RC
rprxC(i) = RPRF1.RxD
rpryC(i) = RPRF1.RyD
rrpxE(i) = RRPf1.RxB
rrpyE(i) = RRPf1.RyB
rrpxF(i) = RRPf1.RxC
rrpyF(i) = RRPf1.RyC
rf6(i) = RRPf1.RD

Next i
平衡力矩显示.Show
End Sub

```

(5) 计算结果。构件 1 上的平衡力矩 T_{y1} 、移动副 B 的约束力矩 T_{B23} 、移动副 F 的约束力矩 T_{F46} 的线图如图 4-23 所示。转动副 A 的反力 (F_{RxA}, F_{RyA}), 转动副 B 的反力 (F_{RxB}, F_{RyB}), 移动副 B 的反力 F_{RB23} 的线图如图 4-24 所示。转动副 C 的反力 (F_{RxC}, F_{RyC}), 转动副 E 的反力 (F_{RxE}, F_{RyE}), 转动副 F 的反力 (F_{RxF}, F_{RyF}), 移动副 F 的反力 F_{RF46} 的线图如图 4-25 所示。

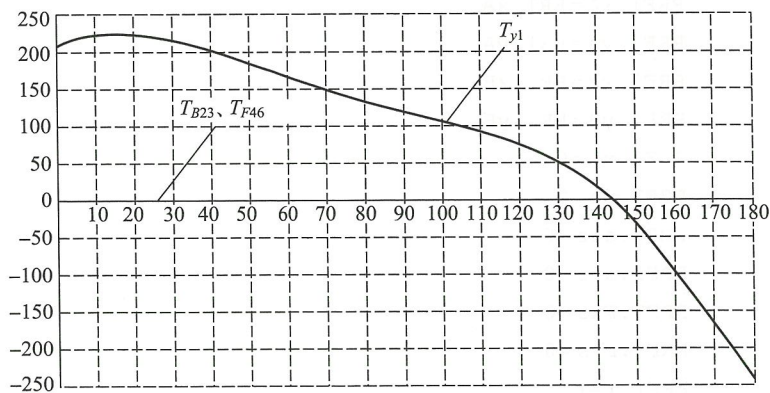


图 4-23

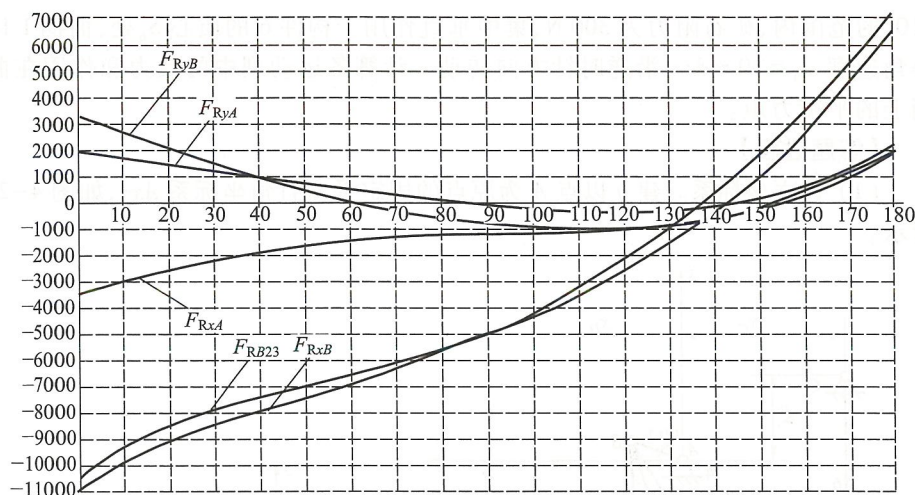


图 4-24

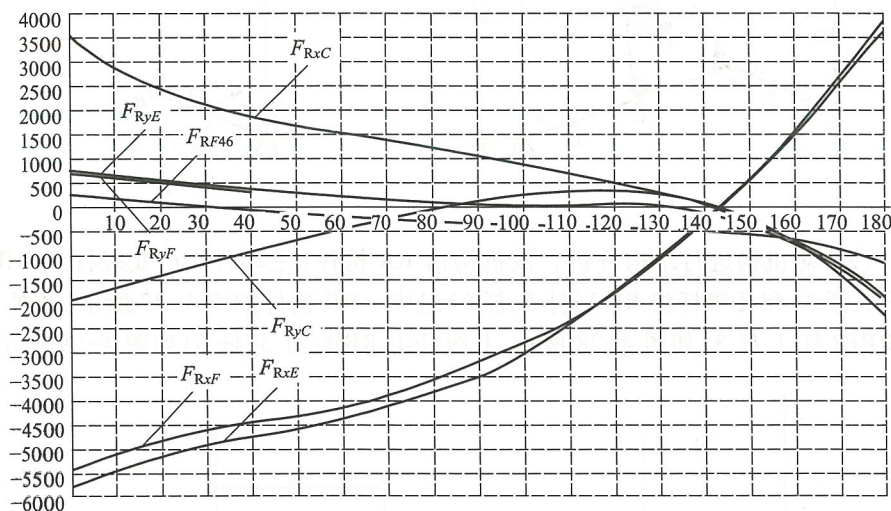


图 4-25

习题 4-6 图 4-26 所示的矿石破碎机机构运动简图中,已知各构件尺寸为 $l_{AB} = 100 \text{ mm}$, $l_{BC} = 460 \text{ mm}$, $l_{CD} = 250 \text{ mm}$, $l_{BE} = 460 \text{ mm}$, $l_{EF} = 265 \text{ mm}$, $l_{FC} = 670 \text{ mm}$; $x_D = 300 \text{ mm}$, $y_D = 500 \text{ mm}$, $x_C = 430 \text{ mm}$, $y_C = 210 \text{ mm}$;各构件质心尺寸为 $l_{BS2} = 300 \text{ mm}$, $\delta_1 = 30^\circ$, $\delta_2 = 15^\circ$, $l_{DS3} = 110 \text{ mm}$, $l_{GS6} = 500 \text{ mm}$, $l_{ES5} = 130 \text{ mm}$;构件 1 的质心在 A 点;各构件质量分别为 $m_1 = 2.0 \text{ kg}$, $m_2 = 9.0 \text{ kg}$, $m_3 = 4.5 \text{ kg}$, $m_5 = 5.0 \text{ kg}$, $m_6 = 15.0 \text{ kg}$;各构件绕其质心的转动惯量为 $J_1 = 0.0015 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, $J_2 = 0.065 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, $J_3 = 0.017 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, $J_5 = 0.03 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, $J_6 = 0.5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$;当曲柄转角处于 $90^\circ \leq \varphi_1 \leq$

210°的范围内,矿石阻力为 300 N,集中垂直作用于构件 6 的质心 S_6 处,曲柄 1 以等角速度 $\omega_1 = 20 \text{ rad/s}$ 沿逆时针方向转动。计算各运动副中的反力和作用在曲柄上的平衡力矩。

【解题过程】

(1) 建立坐标系。建立以点 A 为原点的固定平面直角坐标系 Axy ,如图 4-27 所示。

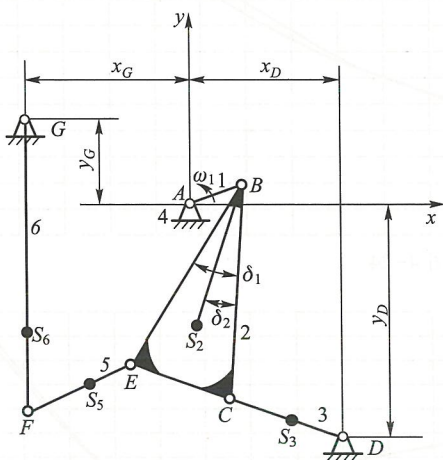


图 4-26

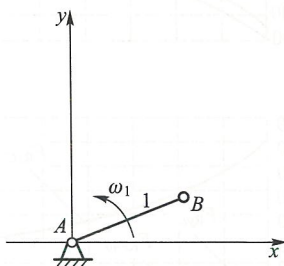


图 4-27

(2) 对机构进行结构分析。该机构由 RR 构件(主动件 1)、Ⅱ级杆组 RRR(杆 2、杆 3)和Ⅱ级杆组 RRR(杆 5、杆 6)组成。RR 构件如图 4-27 所示,Ⅱ级杆组 RRR(杆 2、杆 3)如图 4-28 所示,Ⅱ级杆组 RRR(杆 5、杆 6)如图 4-29 所示。

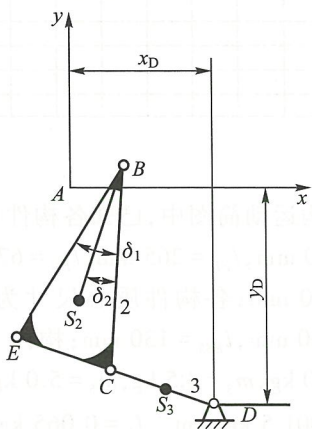


图 4-28

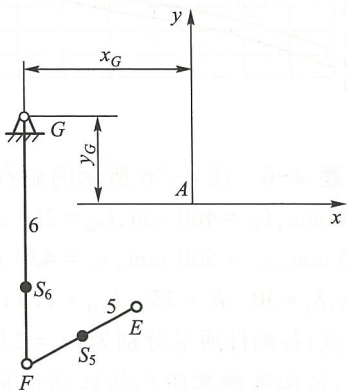


图 4-29

(3) 确定已知参数和求解流程。

1) 主动件杆 1 (I 级杆组 RR) 的运动分析

如图 4-27 所示, 已知主动件杆 1 的转角为

$$\varphi = 90^\circ \sim 210^\circ$$

$$\delta = 0^\circ$$

主动件杆 1 的角速度为

$$\dot{\varphi} = \omega_1 = 20 \text{ rad/s}$$

主动件杆 1 的角加速度为

$$\ddot{\varphi} = \varepsilon = 0$$

运动副 A 的位置坐标为

$$\left. \begin{aligned} x_A &= 0 \\ y_A &= 0 \end{aligned} \right\}$$

运动副 A 的速度为

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_A &= 0 \\ \dot{y}_A &= 0 \end{aligned} \right\}$$

运动副 A 的加速度为

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_A &= 0 \\ \ddot{y}_A &= 0 \end{aligned} \right\}$$

主动件杆 1 的长度为

$$l_{AB} = 100 \text{ mm}$$

求出运动副 B 的位置坐标 (x_B, y_B) 、速度 $(\dot{x}_B, \dot{y}_B)$ 和加速度 $(\ddot{x}_B, \ddot{y}_B)$ 。

2) 构件 2、构件 3 杆组 (II 级杆组 RRR) 的运动分析

如图 4-28 所示, 已求出运动副 B 的位置坐标 (x_B, y_B) 、速度 $(\dot{x}_B, \dot{y}_B)$ 和加速度 $(\ddot{x}_B, \ddot{y}_B)$, 已知运动副 D 的位置坐标为

$$\left. \begin{aligned} x_D &= 300 \text{ mm} \\ y_D &= -500 \text{ mm} \end{aligned} \right\}$$

运动副 D 的速度为

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_D &= 0 \\ \dot{y}_D &= 0 \end{aligned} \right\}$$

运动副 D 的加速度

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_D &= 0 \\ \ddot{y}_D &= 0 \end{aligned} \right\}$$

杆长为

$$l_{BC} = 460 \text{ mm}$$

$$l_{CD} = 250 \text{ mm}$$

求出构件 2 的转角 φ_2 、角速度 $\dot{\varphi}_2$ 和角加速度 $\ddot{\varphi}_2$ ，构件 3 的转角 φ_3 、角速度 $\dot{\varphi}_3$ 和角加速度 $\ddot{\varphi}_3$ 及运动副 C 的位置坐标 (x_C, y_C) 、速度 $(\dot{x}_C, \dot{y}_C)$ 和加速度 $(\ddot{x}_C, \ddot{y}_C)$ 。

3) 构件 2 (I 级杆组 RRI) 的运动分析

如图 4-28 所示, 已求出运动副 B 的位置坐标 (x_B, y_B) 、速度 $(\dot{x}_B, \dot{y}_B)$ 和加速度 $(\ddot{x}_B, \ddot{y}_B)$, 构件 2 的转角 φ_2 、角速度 $\dot{\varphi}_2$ 和角加速度 $\ddot{\varphi}_2$, 已知 $\delta_1 = -30^\circ$, 杆长 $l_{BE} = 460 \text{ mm}$ 。求出运动副 E 的位置坐标 (x_E, y_E) 、速度 $(\dot{x}_E, \dot{y}_E)$ 和加速度 $(\ddot{x}_E, \ddot{y}_E)$ 。

4) 构件 5、构件 6 杆组 (II 级杆组 RRR) 的运动分析

如图 4-29 所示, 已求出运动副 E 的位置坐标 (x_E, y_E) 、速度 $(\dot{x}_E, \dot{y}_E)$ 和加速度 $(\ddot{x}_E, \ddot{y}_E)$, 已知运动副 G 的位置坐标为

$$\left. \begin{aligned} x_G &= -430 \text{ mm} \\ y_G &= 210 \text{ mm} \end{aligned} \right\}$$

运动副 G 的速度为

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_G &= 0 \\ \dot{y}_G &= 0 \end{aligned} \right\}$$

运动副 G 的加速度为

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_G &= 0 \\ \ddot{y}_G &= 0 \end{aligned} \right\}$$

杆长为

$$l_{EF} = 265 \text{ mm}$$

$$l_{FG} = 670 \text{ mm}$$

求出构件 5 的转角 φ_5 、角速度 $\dot{\varphi}_5$ 和角加速度 $\ddot{\varphi}_5$, 构件 6 的转角 φ_6 、角速度 $\dot{\varphi}_6$ 和角加速度 $\ddot{\varphi}_6$ 及运动副 F 的位置坐标 (x_F, y_F) 、速度 $(\dot{x}_F, \dot{y}_F)$ 和加速度 $(\ddot{x}_F, \ddot{y}_F)$ 。

5) 构件 2 质心 S_2 (RR 构件) 的运动分析

如图 4-28 所示, 已求出杆 2 的转角 φ_2 、角速度 $\dot{\varphi}_2$ 和角加速度 $\ddot{\varphi}_2$, 运动副 B 的位置坐标 (x_B, y_B) 、速度 $(\dot{x}_B, \dot{y}_B)$ 和加速度 $(\ddot{x}_B, \ddot{y}_B)$, 已知 $\delta_2 = -15^\circ$, 杆长 $l_{BS_2} = 300 \text{ mm}$ 。求出杆 2 质心 S_2 的位置坐标 (x_{S_2}, y_{S_2}) 、速度 $(\dot{x}_{S_2}, \dot{y}_{S_2})$ 和加速度 $(\ddot{x}_{S_2}, \ddot{y}_{S_2})$ 。

6) 构件 3 质心 S_3 (RR 构件) 的运动分析

如图 4-28 所示, 已求出杆 3 的转角 φ_3 、角速度 $\dot{\varphi}_3$ 和角加速度 $\ddot{\varphi}_3$, 已知运动副 D 的位置坐标为

$$\left. \begin{aligned} x_D &= 300 \text{ mm} \\ y_D &= -500 \text{ mm} \end{aligned} \right\}$$

运动副 D 的速度为

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_D &= 0 \\ \dot{y}_D &= 0 \end{aligned} \right\}$$

运动副 D 的加速度为

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_D &= 0 \\ \ddot{y}_D &= 0 \end{aligned} \right\}$$

杆长为

$$l_{DS3} = 110 \text{ mm}$$

求出杆 3 质心 S_3 的位置坐标 (x_{S3}, y_{S3}) 、速度 $(\dot{x}_{S3}, \dot{y}_{S3})$ 和加速度 $(\ddot{x}_{S3}, \ddot{y}_{S3})$ 。

7) 构件 5 质心 S_5 (RR 构件) 的运动分析

如图 4-29 所示, 已求出杆 5 的转角 φ_5 、角速度 $\dot{\varphi}_5$ 和角加速度 $\ddot{\varphi}_5$, 运动副 E 的位置坐标 (x_E, y_E) 、速度 $(\dot{x}_E, \dot{y}_E)$ 和加速度 $(\ddot{x}_E, \ddot{y}_E)$, 已知杆长 $l_{ES5} = 130 \text{ mm}$ 。求出杆 5 质心 S_5 的位置坐标 (x_{S5}, y_{S5}) 、速度 $(\dot{x}_{S5}, \dot{y}_{S5})$ 和加速度 $(\ddot{x}_{S5}, \ddot{y}_{S5})$ 。

8) 构件 6 质心 S_6 (RR 构件) 的运动分析

如图 4-29 所示, 已求出杆 6 的转角 φ_6 、角速度 $\dot{\varphi}_6$ 和角加速度 $\ddot{\varphi}_6$, 已知运动副 G 的位置坐标为

$$\left. \begin{aligned} x_G &= -430 \text{ mm} \\ y_G &= 210 \text{ mm} \end{aligned} \right\}$$

运动副 G 的速度为

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_G &= 0 \\ \dot{y}_G &= 0 \end{aligned} \right\}$$

运动副 G 的加速度为

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_G &= 0 \\ \ddot{y}_G &= 0 \end{aligned} \right\}$$

杆长为

$$l_{GS6} = 500 \text{ mm}$$

求出杆 6 质心 S_6 的位置坐标 (x_{S6}, y_{S6}) 、速度 $(\dot{x}_{S6}, \dot{y}_{S6})$ 和加速度 $(\ddot{x}_{S6}, \ddot{y}_{S6})$ 。

9) 构件 5、构件 6 杆组 (II 级杆组 RRR) 的力分析

如图 4-29 所示, 已求出运动副 E 的位置坐标 (x_E, y_E) , 运动副 F 的位置坐

标 (x_F, y_F) , 杆 5 的转角 φ_5 、角加速度 $\ddot{\varphi}_5$, 杆 5 质心 S_5 的位置坐标 (x_{S5}, y_{S5}) 、加速度 $(\ddot{x}_{S5}, \ddot{y}_{S5})$, 杆 6 的转角 φ_6 、角加速度 $\ddot{\varphi}_6$, 杆 6 质心 S_6 的位置坐标 (x_{S6}, y_{S6}) 、加速度 $(\ddot{x}_{S6}, \ddot{y}_{S6})$, 已知运动副 G 的位置坐标为

$$\left. \begin{aligned} x_G &= -430 \text{ mm} \\ y_G &= 210 \text{ mm} \end{aligned} \right\}$$

杆 5 的质量为

$$m_5 = 5.0 \text{ kg}$$

杆 5 对其质心 S_5 的转动惯量为

$$J_5 = 0.03 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

杆 6 的质量为

$$m_6 = 15.0 \text{ kg}$$

杆 6 对其质心 S_6 的转动惯量为

$$J_6 = 0.5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

杆 6 质心 S_6 所受外力为

$$\left. \begin{aligned} F_{xS6} &= -300 \sin \varphi_6 \\ F_{yS6} &= 300 \cos \varphi_6 \end{aligned} \right\}$$

求出运动副 G 的反力 (F_{RxG}, F_{RyG}) 和运动副 E 的反力 (F_{RxE}, F_{RyE}) 。

10) 构件 2(三副构件)的力分析

如图 4-28 所示, 已求出运动副 E 的位置坐标 (x_E, y_E) , 运动副 E 的反力 (F_{RxE}, F_{RyE}) 和杆 2 质心 S_2 的位置坐标 (x_{S2}, y_{S2}) , 把运动副 E 的反力 (F_{RxE}, F_{RyE}) 化简为作用在杆 2 质心 S_2 的外力 (F_{xS2}, F_{yS2}) 和外力矩 T_2 。

11) 构件 2、构件 3 杆组(Ⅱ级杆组 RRR)的力分析

如图 4-28 所示, 已求出运动副 B 的位置坐标 (x_B, y_B) , 运动副 C 的位置坐标 (x_C, y_C) , 杆 2 的转角 φ_2 、角加速度 $\ddot{\varphi}_2$, 杆 2 质心 S_2 的位置坐标 (x_{S2}, y_{S2}) 、加速度 $(\ddot{x}_{S2}, \ddot{y}_{S2})$, 作用在杆 2 质心 S_2 的外力 (F_{xS2}, F_{yS2}) 、外力矩 T_2 , 杆 3 的转角 φ_3 和角加速度 $\ddot{\varphi}_3$, 杆 3 质心 S_3 的位置坐标 (x_{S3}, y_{S3}) 、加速度 $(\ddot{x}_{S3}, \ddot{y}_{S3})$, 已知运动副 D 的位置坐标为

$$\left. \begin{aligned} x_D &= 300 \text{ mm} \\ y_D &= -500 \text{ mm} \end{aligned} \right\}$$

杆 2 的质量为

$$m_2 = 9.0 \text{ kg}$$

杆 2 对其质心 S_2 的转动惯量为

$$J_2 = 0.065 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

杆 3 的质量为

$$m_3 = 4.5 \text{ kg}$$

杆 3 对其质心 S_3 的转动惯量为

$$J_3 = 0.017 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

求出运动副 B 的反力 (F_{RxB}, F_{RyB}) , 运动副 D 的反力 (F_{RxD}, F_{RyD}) 。

12) 主动构件 1 (RR 构件) 的力分析

如图 4-27 所示, 已求出运动副 B 的位置坐标 (x_B, y_B) , 运动副 B 的反力 (F_{RxB}, F_{RyB}) , 已知运动副 A 的位置坐标为

$$\left. \begin{aligned} x_A &= 0 \\ y_A &= 0 \end{aligned} \right\}$$

杆 1 的角加速度为

$$\ddot{\varphi}_1 = 0$$

杆 1 的质心 S_1 位置坐标为

$$\left. \begin{aligned} x_{S1} &= 0 \\ y_{S1} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

杆 1 的质量为

$$m_1 = 2.0 \text{ kg}$$

杆 1 对其质心 S_1 的转动惯量为

$$J_1 = 0.0015 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

求出运动副 A 的反力 (F_{RxA}, F_{RyA}) 和构件 1 上的平衡力矩 T_{y1} 。

(4) 用 VB 编程, 程序如下。

```
Public fl(3600) As Double
Public tty(3600) As Double
Public rrxA(3600) As Double
Public rryA(3600) As Double
Public rrxB(3600) As Double
Public rryB(3600) As Double
Public rrrxC(3600) As Double
Public rrryC(3600) As Double
Public rrrxD(3600) As Double
Public rrryD(3600) As Double
Public rrrxE(3600) As Double
Public rrryE(3600) As Double
Public rrrxF(3600) As Double
Public rrryF(3600) As Double
```

```

Public rrrxG(3600) As Double
Public rrryG(3600) As Double
Public g As Double
Public pi As Double
Public pa As Double
Sub main()
    Dim i As Long
    Dim RR1 As RR
    Dim RR2 As RR
    Dim RR3 As RR
    Dim RR4 As RR
    Dim RR5 As RR
    Dim RR6 As RR
    Dim RRR1 As RRR
    Dim RRR2 As RRR
    Dim RRRF1 As RRRF
    Dim RRRF2 As RRRF
    Dim RRF1 As RRF
    Dim ABCF1 As ABCF
    Set RR1 = New RR
    Set RR2 = New RR
    Set RR3 = New RR
    Set RR4 = New RR
    Set RR5 = New RR
    Set RR6 = New RR
    Set RRR1 = New RRR
    Set RRR2 = New RRR
    Set RRRF1 = New RRRF
    Set RRRF2 = New RRRF
    Set RRF1 = New RRF
    Set ABCF1 = New ABCF
    pi = 3.1415926
    pa = pi / 180
    g = 9.81
    For i = 900 To 2100 Step 1
        f1(i) = i * pa / 10
        ' 杆 1 的运动分析
    
```

```

RR1.f=f1(i)
RR1.w=20
RR1.e=0
RR1.delt=0
RR1.L=0.1
RR1.xA=0
RR1.yA=0
RR1.vxA=0
RR1.vyA=0
RR1.axA=0
RR1.ayA=0
RR1.cal
'Debug.Print RR1.xB,RR1.yB
'杆 2、3 的运动分析
RRR1.xD=RR1.xB
RRR1.yD=RR1.yB
RRR1.vxD=RR1.vxB
RRR1.vyD=RR1.vyB
RRR1.axD=RR1.axB
RRR1.ayD=RR1.ayB
RRR1.xB=0.3
RRR1.yB=-0.5
RRR1.vxB=0
RRR1.vyB=0
RRR1.axB=0
RRR1.ayB=0
RRR1.Li=0.25
RRR1.Lj=0.46
RRR1.m=1
RRR1.cal
'运动副 E 的运动分析
RR2.f=RRR1.fj
RR2.w=RRR1.wj
RR2.e=RRR1.ej
RR2.delt=-30*pa
RR2.L=0.46
RR2.xA=RR1.xB

```

```

RR2.yA=RR1.yB
RR2.vxA=RR1.vxB
RR2.vyA=RR1.vyB
RR2.axA=RR1.axB
RR2.ayA=RR1.ayB
RR2.cal
'Debug.Print RR2.xB,RR2.yB
'Stop
'杆 5、6 的运动分析
RRR2.xB=RR2.xB
RRR2.yB=RR2.yB
RRR2.vxB=RR2.vxB
RRR2.vyB=RR2.vyB
RRR2.axB=RR2.axB
RRR2.ayB=RR2.ayB
RRR2.xD=-0.43
RRR2.yD=0.21
RRR2.vxD=0
RRR2.vyD=0
RRR2.axD=0
RRR2.ayD=0
RRR2.Li=0.265
RRR2.Lj=0.67
RRR2.m=1
RRR2.cal
'杆 2 质心 s2 的运动分析
RR3.f=RRR1.fj
RR3.w=RRR1.wj
RR3.e=RRR1.ej
RR3.L=0.3
RR3.delt=-15*pa
RR3.xA=RR1.xB
RR3.yA=RR1.yB
RR3.vxA=RR1.vxB
RR3.vyA=RR1.vyB
RR3.axA=RR1.axB
RR3.ayA=RR1.ayB

```


RR3.cal
'杆 3 质心 s3 的运动分析

RR4.f=RRR1.fi
RR4.w=RRR1.wi
RR4.e=RRR1.ei
RR4.L=0.11
RR4.delt=0
RR4.xA=RRR1.xB
RR4.yA=RRR1.yB
RR4.vxA=RRR1.vxB
RR4.vyA=RRR1.vyB
RR4.axA=RRR1.axB
RR4.ayA=RRR1.ayB

RR4.cal
'杆 5 质心 s5 的运动分析

RR5.f=RRR2.fi
RR5.w=RRR2.wi
RR5.e=RRR2.ei
RR5.L=0.13
RR5.delt=0
RR5.xA=RRR2.xB
RR5.yA=RRR2.yB
RR5.vxA=RRR2.vxB
RR5.vyA=RRR2.vyB
RR5.axA=RRR2.axB
RR5.ayA=RRR2.ayB

RR5.cal
'杆 6 质心 s6 的运动分析

RR6.f=RRR2.fj
RR6.w=RRR2.wj
RR6.e=RRR2.ej
RR6.L=0.5
RR6.delt=0
RR6.xA=RRR2.xD
RR6.yA=RRR2.yD
RR6.vxA=RRR2.vxD
RR6.vyA=RRR2.vyD

```

RR6.axA=RRR2.axD
RR6.ayA=RRR2.ayD
RR6.cal
'杆 5、6 的力分析
RRRF2.xB=RRR2.xB
RRRF2.yB=RRR2.yB
RRRF2.xC=RRR2.xC
RRRF2.yC=RRR2.yC
RRRF2.xD=RRR2.xD
RRRF2.yD=RRR2.yD
RRRF2.xsi=RR5.xB
RRRF2.ysi=RR5.yB
RRRF2.axsi=RR5.axB
RRRF2.aysi=RR5.ayB
RRRF2.xsj=RR6.xB
RRRF2.ysj=RR6.yB
RRRF2.axsj=RR6.axB
RRRF2.aysj=RR6.ayB
RRRF2.ei=RRR2.ei
RRRF2.ej=RRR2.ej
RRRF2.mi=5
RRRF2.mj=15
RRRF2.Jsi=0.03
RRRF2.Jsj=0.5
RRRF2.Fxsi=0
RRRF2.Fysi=0
RRRF2.Ti=0
RRRF2.Fxsj=-300*Sin(RRR2.fj)
RRRF2.Fysj=300*Cos(RRR2.fj)
RRRF2.Tj=0
RRRF2.cal
'杆 2(三副构件)的力分析
ABCF1.xs=RR3.xB
ABCF1.ys=RR3.yB
ABCF1.xC=RR2.xB
ABCF1.yC=RR2.yB
ABCF1.TwC=0

```

```

ABCF1.Fxs0=0
ABCF1.Fys0=0
ABCF1.T0=0
ABCF1.FxC=-RRRF2.RxB
ABCF1.FyC=-RRRF2.RyB
ABCF1.cal
'杆 2、3 的力分析
RRRF1.xB=RRR1.xB
RRRF1.yB=RRR1.yB
RRRF1.xC=RRR1.xC
RRRF1.yC=RRR1.yC
RRRF1.xD=RRR1.xD
RRRF1.yD=RRR1.yD
RRRF1.xsi=RR4.xB
RRRF1.ysi=RR4.yB
RRRF1.axsi=RR4.axB
RRRF1.aysi=RR4.ayB
RRRF1.xsj=RR3.xB
RRRF1.ysj=RR3.yB
RRRF1.axsj=RR3.axB
RRRF1.aysj=RR3.ayB
RRRF1.ei=RRR1.ei
RRRF1.ej=RRR1.ej
RRRF1.mi=4.5
RRRF1.mj=9
RRRF1.Jsi=0.017
RRRF1.Jsj=0.065
RRRF1.Fxsi=0
RRRF1.Fysi=0
RRRF1.Ti=0
RRRF1.Fxsj=ABCF1.Fxs
RRRF1.Fysj=ABCF1.Fys
RRRF1.Tj=ABCF1.T
RRRF1.cal
'杆 1 的力分析
RRF1.xA=RR1.xA
RRF1.yA=RR1.yA

```

```

RRF1.xB=RR1.xB
RRF1.yB=RR1.yB
RRF1.xs=RR1.xA
RRF1.ys=RR1.yA
RRF1.axs=RR1.axA
RRF1.ays=RR1.ayA
RRF1.f=RR1.f
RRF1.e=RR1.e
RRF1.m=2
RRF1.Js=0.0015
RRF1.Fxs=0
RRF1.Fys=0
RRF1.T=0
RRF1.RxB=-RRRF1.RxD
RRF1.RyB=-RRRF1.RyD
RRF1.cal
tty(i)=RRF1.Ty
rrxA(i)=RRF1.RxA
rryA(i)=RRF1.RyA
rrxB(i)=RRRF1.RxD
rryB(i)=RRRF1.RyD
rrxC(i)=RRRF1.RxC
rryC(i)=RRRF1.RyC
rrxD(i)=RRRF1.RxB
rryD(i)=RRRF1.RyB
rrxE(i)=RRRF2.RxB
rryE(i)=RRRF2.RyB
rrxF(i)=RRRF2.RxC
rryF(i)=RRRF2.RyC
rrxG(i)=RRRF2.RxD
rryG(i)=RRRF2.RyD
Next i
平衡力矩显示.Show
End Sub

```

(5) 计算结果。构件 1 上的平衡力矩 T_{y1} 的线图如图 4-30 所示。运动副 A 的反力(F_{RxA} , F_{RyA}), 运动副 B 的反力(F_{RxB} , F_{RyB}), 运动副 C 的反力(F_{RxC} , F_{RyC}), 运

动副 D 的反力 (F_{RxD}, F_{RyD}) 的线图如图 4-31 所示。运动副 E 的反力 (F_{RxE}, F_{RyE}), 运动副 F 的反力 (F_{RxF}, F_{RyF}), 运动副 G 的反力 (F_{RxG}, F_{RyG}) 的线图如图 4-32 所示。

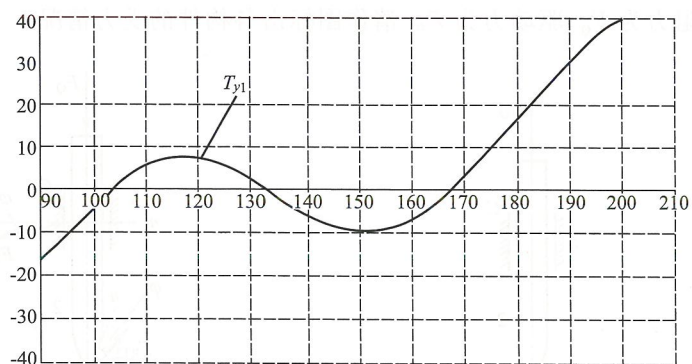


图 4-30

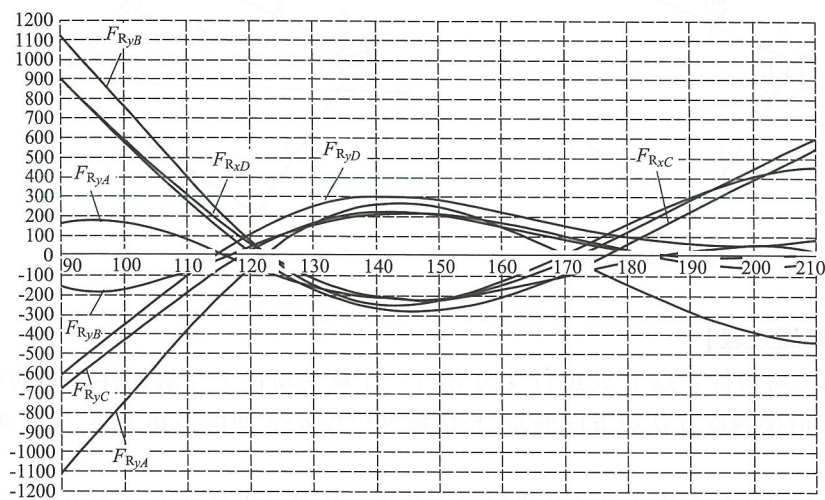


图 4-31

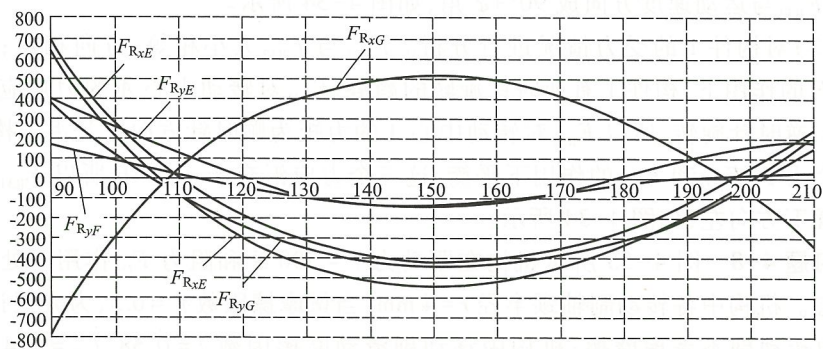


图 4-32

习题 4-7 作用在机构各构件上的外力如图 4-33 所示, 构件 1 以角速度 ω_1 沿逆时针方向匀速转动, 考虑运动副中的摩擦, 设摩擦角 $\varphi = 15^\circ$, 图中虚线小圆为摩擦圆, 阻力为 F_Q , 驱动力为 F 。请作图标出各构件的受力情况。

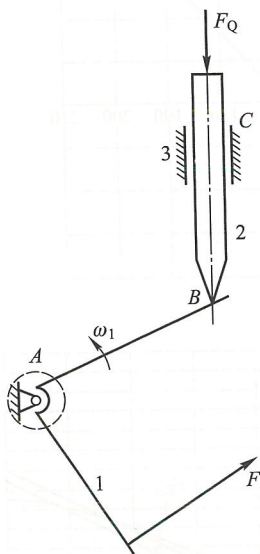


图 4-33

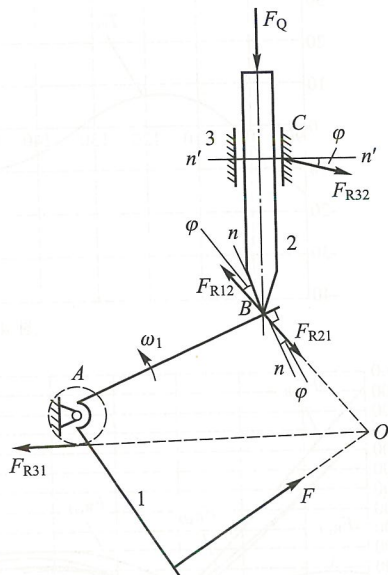


图 4-34

【解题过程】

(1) 对构件 2 点 B 处进行受力分析。计及主动件 1 与从动件 2 间的摩擦时, F_{R12} 沿接触点 B 法线方向偏左, 与接触点法线 $n-n$ 间的夹角为 φ , 如图 4-34 所示。

(2) 对构件 2 移动副 C 处进行受力分析。构件 2 沿移动副 C 有向上运动的趋势, F_{R32} 与运动速度方向成 $90^\circ + \varphi$ 角, 如图 4-34 所示。

(3) 对构件 1 的受力情况进行分析。 F_{R21} 与 F_{R12} 大小相等, 方向相反; 在驱动力 F 的作用下, 构件 1 有逆时针旋转的趋势, F_{R31} 对转动中心 A 的力矩应阻止构件 1 逆时针旋转, 所以 F_{R31} 对转动中心 A 的力矩为顺时针方向。又由于构件 1 在三个力 F 、 F_{R21} 和 F_{R31} 的作用下平衡, 这三个力应汇交于一点 O, 所以 F_{R31} 切于摩擦圆下方向左, 如图 4-34 所示。

习题 4-8 图 4-35 所示机构在驱动力 $F = 500 \text{ N}$ 和阻力 F_Q 作用下处于平衡状态。机构中各转动副轴颈半径 $r = 4 \text{ mm}$, 当量摩擦因数 $f_v = 0.5$, 为方便计算, C 处的转动副不考虑摩擦; 机构中移动副滑动摩擦因数 $f = 0.58$, $l_{AB} = 114 \text{ mm}$,

$l_{BC} = 100 \text{ mm}$, $l_{CD} = 50 \text{ mm}$, $l_{DE} = 77 \text{ mm}$, 各构件的质量不计, 计算中角度可适当圆整。试:

(1) 画图标注在当前位置所有构件的受力方向, 并求滑块 5 所受各力的大小;

(2) 求该瞬时机构的机械效率。

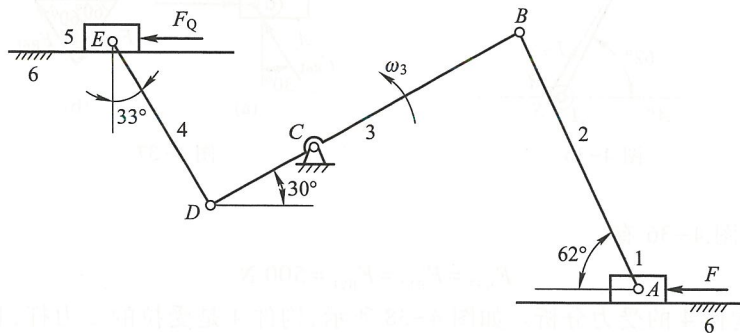


图 4-35

【解题过程】

(1)

1) 计算摩擦圆半径和摩擦角。转动副处的摩擦圆半径为 $\rho = 4 \text{ mm} \times 0.5 = 2 \text{ mm}$, 移动副的摩擦角 $\varphi = \arctan f = \arctan 0.58 = 30^\circ$ 。

2) 构件 2 的受力分析。在 A、B 处画摩擦圆, 如图 4-36 所示。由于构件 2 是受压的二力杆, 且有绕 B 点顺时针转动的趋势, 所以构件 2 在 B 点的受力应阻止其顺时针转动, 即 F_{R32} 切于摩擦圆的下方。同理, 构件 2 有绕 A 点顺时针转动的趋势, 所以 F_{R12} 切于摩擦圆的上方。

设 M 为 F_{R12} 与摩擦圆的切点, S 为力的作用线的延长线与水平线的交点, 则

$$\angle AA'M = \arcsin \frac{\rho}{AA'} = \arcsin \frac{2}{57} \approx 2^\circ$$

$\angle AA'M + \angle A'SA'' = \angle A'AA'' = 62^\circ \Rightarrow \angle A'SA'' = 60^\circ$, 即力的作用线与水平方向夹角为 60° 。

3) 滑块 1 的受力分析。如图 4-37a 所示, 由于滑块 1 有向左运动的趋势, F_{R61} 的水平分力应阻止滑块 1 向左运动, 即 F_{R61} 水平分力向右。 F_{R21} 与 F_{R12} 大小相等, 方向相反。滑块 1 在 F_{R21} 、 F_{R61} 与 F 三个力的作用下平衡, 这三个力汇交于一点。根据图 4-37b 所示的力等边三角形, 有

$$F_{R21} = F_{R61} = F = 500 \text{ N}$$

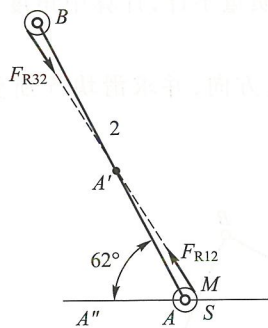


图 4-36

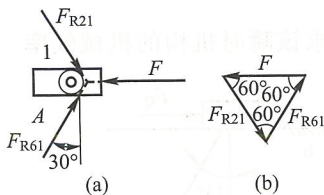


图 4-37

结合图 4-36 有

$$F_{R32} = F_{R12} = F_{R21} = 500 \text{ N}$$

4) 构件 4 的受力分析。如图 4-38 所示, 构件 4 是受拉的二力杆, 且有绕 E 点沿顺时针方向转动的趋势, 所以 F_{R54} 切于摩擦圆的上方。同理, 构件 4 有绕 D 点沿顺时针方向旋转的趋势, 所以 F_{R34} 切于摩擦圆的下方。

设 N 为 F_{R34} 与摩擦圆的切点, 则

$$\angle DD'N = \arcsin \frac{\rho}{DD'} = \arcsin \frac{2}{38.5} \approx 3^\circ$$

$\angle ND'D'' = 33^\circ - 3^\circ = 30^\circ$, 即力的作用线方向与竖直方向夹角为 30° 。

5) 构件 3 的受力分析。经上述分析可知 F_{R43} 与竖直方向的夹角为 30° , F_{R23} 与水平方向的夹角为 60° , 如图 4-39 所示。因此, $F_{R43} \parallel F_{R23}$, 且与杆 DB 垂直。

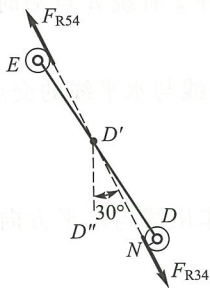


图 4-38

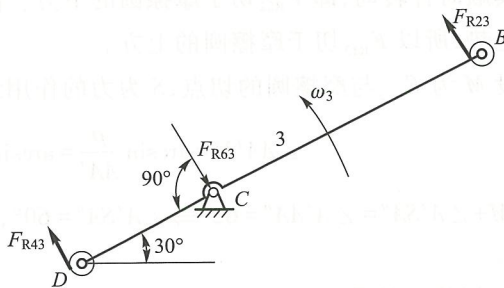


图 4-39

根据力矩平衡有

$$F_{R43} \times l_{CD} = F_{R23} \times l_{BC} \Rightarrow F_{R43} \times 50 \text{ mm} = 500 \times 100 \text{ N} \cdot \text{mm} \Rightarrow F_{R43} = 1000 \text{ N}$$

结合图 4-38 有

$$F_{R54} = F_{R34} = F_{R43} = 1\,000\text{ N}$$

由构件 3 处于平衡状态可知:机架 6 给构件 3 的力 F_{R63} 的方向与 F_{R43} 和 F_{R23} 平行,方向向下,大小为

$$F_{R63} = F_{R43} + F_{R23} = 1\,000\text{ N} + 500\text{ N} = 1\,500\text{ N}$$

6) 构件 5 的受力分析。如图 4-40 所示,由于滑块 5 有向右运动的趋势,所以 F_{R65} 的水平分力应阻止滑块向右运动。根据摩擦角 $\varphi = 30^\circ$,画出 F_{R65} ,其与竖直方向呈 30° 。又由于 $F_{R45} = F_{R54}$,且与竖直方向呈 30° ,所以 $F_{R45} \parallel F_{R65}$,且与 F_{R65} 方向相反。又由于构件 5 处于平衡状态,所以 $F_{R65} = F_{R45} = 1\,000\text{ N}$,则此时输入的 F_Q 力为 0。

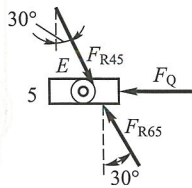


图 4-40

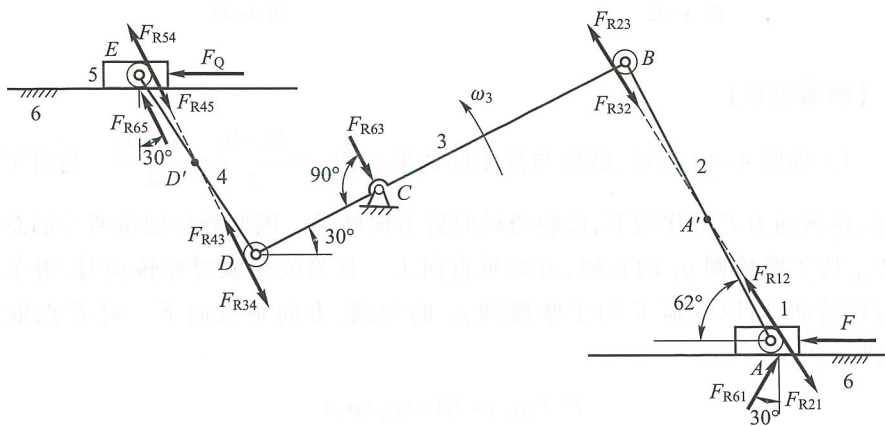


图 4-41

(2) 由于实际工作阻力 $F_Q = 0$, 所以机械效率 $\eta = \frac{\text{实际工作阻力}}{\text{理想工作阻力}} = 0$ 。

习题 4-9 图 4-42 所示我国古代发明的差动起重辘轳中,已知鼓轮的直径

D_1 和 D_2 , 滑车的直径 $D_3 = \frac{D_1 + D_2}{2}$; 手柄的长度 l , 鼓轮轴承和滑车轴承的摩擦圆半径 ρ_1 和 ρ_3 。设不考虑绳的内摩擦, 求该起重辘轳的机械效率 η 以及反行程的自锁条件。其中 G 为载荷, F 为作用在 C 处的切向驱动力, 其方向为垂直向下。

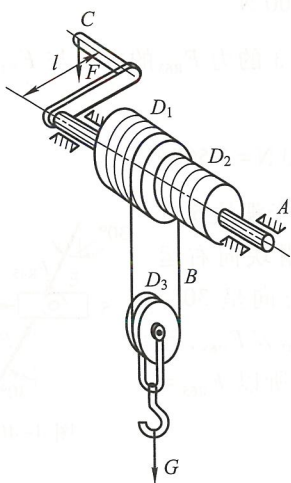


图 4-42

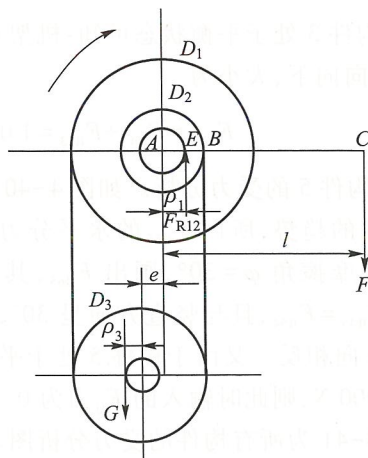


图 4-43

【解题过程】

(1) 如图 4-43 所示, 鼓轮与滑车间的偏心距 $e = \frac{D_3 - D_2}{2} = \frac{D_1 - D_2}{4}$ 。当滑车上升时, 在驱动力 F 的作用下, 鼓轮沿顺时针方向转动。因此鼓轮轴承所受的总反力 F_{R12} 切于摩擦圆 ρ_1 的右侧, 方向垂直向上。且当鼓轮顺时针转动时, 滑车也顺时针转动, 所以载荷 G 切于摩擦圆 ρ_3 的左侧, 方向垂直向下。对 E 点取力矩, 得

$$F(l - \rho_1) = G(e + \rho_1 + \rho_3)$$

从而得

$$F = \frac{e + \rho_1 + \rho_3}{l - \rho_1} G$$

令 $\rho_1 = \rho_3 = 0$, 得理想驱动力为

$$F_0 = \frac{e}{l} G$$

故滑车上升时的效率为

$$\eta = \frac{F_0}{F} = \frac{e(l - \rho_1)}{l(e + \rho_1 + \rho_3)} = \frac{(D_1 - D_2)(l - \rho_1)}{l(D_1 - D_2 + 4\rho_1 + 4\rho_3)}$$

(2) 以 $-\rho_1$ 代替 ρ_1 , 以 $-\rho_3$ 代替 ρ_3 , 则得维持滑车等速下滑时的维持力为

$$F' = \frac{e^{-\rho_1 - \rho_3}}{l + \rho_1} G$$

令 $\rho_1 = \rho_3 = 0$, 得滑车下滑时的理想维持力为

$$F'_0 = \frac{e}{l} G$$

于是, 滑车下降时的机械效率为

$$\eta' = \frac{F'}{F'_0} = \frac{l(e - \rho_1 - \rho_3)}{e(l + \rho_1)} = \frac{(D_1 - D_2 - 4\rho_1 - 4\rho_3)l}{(D_1 - D_2)(l + \rho_1)}$$

反行程自锁时 $\eta' = 0$, 即

$$D_1 - D_2 - 4\rho_1 - 4\rho_3 \leq 0$$

即

$$\rho_1 + \rho_3 \geq \frac{D_1 - D_2}{4}$$

习题 4-10 图 4-44 所示矩形螺纹千斤顶中, 已知螺纹外直径 $d = 24 \text{ mm}$, 内直径 $d_1 = 20 \text{ mm}$; 托盘小端直径 $D = 42 \text{ mm}$, 托盘孔直径 $D_1 = 20 \text{ mm}$; 手柄长度 $l = 300 \text{ mm}$, 所有摩擦面的摩擦因数均为 $f = 0.1$, 求该千斤顶的机械效率。又若 $F = 100 \text{ N}$, 求千斤顶可举起的重量 G 为多少?

【解题过程】

矩形螺纹的中径为

$$d_2 = \frac{d + d_1}{2} = \frac{24 \text{ mm} + 20 \text{ mm}}{2} = 22 \text{ mm}$$

螺距 P 为

$$P = d - d_1 = 4 \text{ mm}$$

螺纹升角为

$$\lambda = \arctan \frac{P}{\pi d_2} = \arctan \frac{4}{22\pi} = 3.3123^\circ$$

摩擦角为

$$\varphi = \arctan f = \arctan 0.1 = 5.7106^\circ$$

设作用在螺纹中径上的驱动力为 F' , 则

千斤顶举起重物时, 驱动力为

$$F' = G \tan(\lambda + \varphi)$$

理想驱动力为

$$F'_0 = G \tan \lambda$$

机械效率为

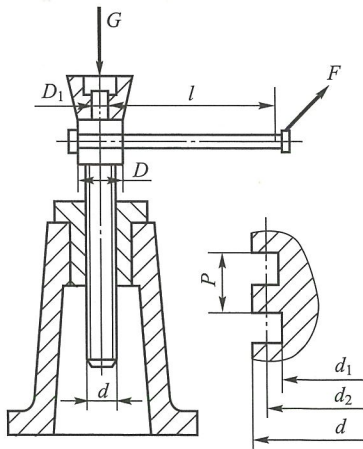


图 4-44

$$\eta = \frac{F'_0}{F'} = \frac{\tan \lambda}{\tan(\lambda + \varphi)} = \frac{\tan 3.3123^\circ}{\tan(3.3123^\circ + 5.7106^\circ)} = 0.3645$$

按托盘小端面已跑合计算,则托盘小端面的摩擦力矩为

$$M_f = \frac{D + D_1}{4} fG$$

于是有

$$M_f + F' \frac{d_2}{2} = Fl$$

即

$$\frac{D + D_1}{4} fG + G \frac{d_2}{2} \tan(\lambda + \varphi) = Fl$$

当 $F = 100 \text{ N}$ 时,千斤顶可举起重物的重量为

$$\begin{aligned} G &= \frac{Fl}{\frac{D + D_1}{4} f + \frac{d_2}{2} \tan(\lambda + \varphi)} \\ &= \frac{100 \times 300}{\frac{42 + 20}{4} \times 0.1 + \frac{22}{2} \tan(3.3123^\circ + 5.7106^\circ)} \text{ N} = 9\,099.9 \text{ N} \end{aligned}$$



图 4-10

第五章 平面连杆机构及其设计

5.1 基本要求

掌握四杆机构的类型及其演化,掌握存在曲柄的条件,压力角、行程速度变化系数和死点位置等概念,以及平面四杆机构的设计方法。

5.2 重点及难点解析

5.2.1 本章重点

本章重点是平面四杆机构的基本类型及其演化,有关四杆机构的一些基本知识、基本概念和基本设计方法。

1. 平面四杆机构的基本类型

铰链四杆机构根据其两连架杆运动情况的不同,可分为曲柄摇杆机构、双曲柄机构和双摇杆机构。

2. 平面连杆机构的演化

(1) 改变相对杆长、转动副演化为移动副。这种演化方式可将曲柄摇杆机构演化成曲柄滑块机构及双滑块机构。

(2) 选用不同构件为机架。

1) 变化铰链四杆机构的机架。以铰链四杆机构的不同构件为机架时可将其演化成曲柄摇杆机构、双曲柄机构及双摇杆机构。

2) 变化单移动副机构的机架。以曲柄滑块机构的不同构件为机架时可将其演化成曲柄摇块机构、移动导杆机构、转动导杆机构(或摆动导杆机构)。

3) 变化双移动副机构的机架。通过这种演化方式可将双滑块机构演化成双转块机构、曲柄移动导杆机构等。

(3) 扩大转动副尺寸。通过这种演化方式可将曲柄摇杆机构演化成单偏心轮机构及双偏心轮机构。

3. 铰链四杆机构存在曲柄的条件

(1) 最短杆和最长杆长度之和小于或等于其他两杆长度之和。

(2) 最短杆是连架杆或机架。当以最短杆的邻边为机架时,该铰链四杆机构称为曲柄摇杆机构;当以最短杆为机架时,该铰链四杆机构称为双曲柄机构;当以最短杆的对边为机架时,铰链四杆机构中无曲柄,此时称为双摇杆机构;当不满足存在曲柄条件的尺寸约束要求时,无论以铰链四杆机构的哪个构件作为机架,该机构都是双摇杆机构。

4. 曲柄滑块机构存在曲柄的条件

曲柄与偏距之和小于或等于连杆长度。

5. 几个基本概念

(1) 压力角和传动角。如果不考虑构件的惯性力和铰链中的摩擦力,主动件通过连杆作用到从动件上的力的作用线与受力点的绝对速度所夹的锐角称为压力角,用 α 表示。压力角的余角称为传动角,用 γ 表示。

(2) 急回运动和行程速度变化系数。

1) 极位夹角。曲柄摇杆机构中,在主动件曲柄转过一周的过程中,从动件摇杆应经过两个极限位置。在此两极限位置所对应的一个曲柄位置与另一个曲柄位置反向延长线间所夹的角度称为极位夹角,用 θ 表示。

2) 急回运动。在曲柄摇杆机构中,通常把从动摇杆往复摆动平均速度不等的运动称为急回运动。

3) 行程速度变化系数。通常把从动件往复摆动平均速度的比值(大于1)称为行程速度变化系数,并用 K 表示,即

$$K = \frac{\text{从动件快速行程平均速度}}{\text{从动件慢速行程平均速度}}$$

(3) 机构的死点位置。机构的死点位置是指从动件的传动角 $\gamma = 0^\circ$ 时机构所处的位置(也就是从动件与连杆共线的位置)。

(4) 运动的连续性。在平面连杆机构中,当主动件连续运动时,其他构件能连续地占据预定的各个位置,称机构具有运动的连续性。在设计曲柄摇杆时,不能要求从动摇杆在两个不连通的可行域内运动,可以用机架是否穿过可行域来判断所设计曲柄摇杆机构运动的连续性。

5.2.2 本章难点

本章的难点是平面四杆机构的设计。

平面四杆机构设计包括函数机构设计、轨迹机构设计和导引机构设计。平面四杆机构的设计方法有图解法、解析法和数值比较法。设计时要具体问题具体分析。

5.3 典型例题分析及解题技巧

例 5-1 图 5-1 所示的铰链四杆机构中,已知各杆的尺寸为 $l_1 = 28 \text{ mm}$, $l_2 = 52 \text{ mm}$, $l_3 = 50 \text{ mm}$, $l_4 = 72 \text{ mm}$ 。试求:

(1) 若分别取杆 4 和杆 3 为机架,该机构是哪种类型的四杆机构? 说明判断的根据。

(2) 图示机构的极位夹角、杆 3 的最大摆角 ψ , 行程速度变化系数, 最小传动角 $\gamma_{\min}$ 和最大传动角 $\gamma_{\max}$ 。

(3) 图示机构在什么情况下有死点位置?

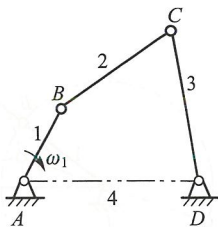


图 5-1

【解题思路及技巧】

(1) 本题的解题关键在于掌握四杆机构的基本形式及特性。当满足存在曲柄条件时,若以最短杆为机架,该机构成为双曲柄机构;若以最短杆的邻边为机架,该机构为曲柄摇杆机构;若以最短杆的对边为机架,该机构为双摇杆机构。当不满足存在曲柄条件的尺寸约束要求时,无论以哪个构件作为机架,该机构都是双摇杆机构。

(2) 当曲柄处于与连杆共线的两位置时,摇杆 3 处于两极限位置,其两位置间的夹角为摇杆的最大摆角 ψ ,此时曲柄的一个位置与曲柄的另一位置反向延长线间的夹角即为极位夹角 θ 。

(3) 最小传动角与最大传动角出现在曲柄与机架共线时连杆与摇杆间所夹的锐角。

【解题过程】

(1) 图 5-1 所示的机构中,最短杆为 l_1 ,最长杆为 l_4 ,由 $l_1 + l_4 \leq l_2 + l_3$ 可知,该机构满足存在曲柄条件;当取杆 4 为机架(即最短杆 1 为连架杆)时,该机构为曲柄摇杆机构;当取杆 3 为机架(即以最短杆的对边为机架)时,该机构为双摇杆机构。

(2) 如图 5-2a 所示,作出曲柄与连杆共线的两位置,此时摇杆处于两极限位置,由图量得 $\theta = 18.6^\circ$, $\psi = 70.6^\circ$,由 $\theta = 18.6^\circ$ 计算行程速度变化系数 K 为

$$K = \frac{180^\circ + \theta}{180^\circ - \theta} = \frac{180^\circ + 18.6^\circ}{180^\circ - 18.6^\circ} = 1.23$$

如图 5-2b 所示,作出曲柄与机架共线的两位置,由图量得 $\gamma'' = 51.1^\circ$ 、 $\gamma' = 22.7^\circ$,由于 $\gamma' < \gamma''$,所以此机构的最小传动角 $\gamma_{\min} = \gamma' = 22.7^\circ$,最大传动角 $\gamma_{\max} = \gamma'' = 51.1^\circ$ 。

(3) 若以曲柄 1 为主动件,由图 5-2b 可知,不存在 $\gamma = 0^\circ$ 的位置,故机构无

死点位置。若以摇杆 3 为主动件, 则从动件曲柄 1 与连杆 2 所夹的锐角为机构的传动角。如图 5-2c 所示, 机构存在曲柄 1 与连杆 2 共线两位置, 即存在传动角 $\gamma = 0^\circ$ 的位置, 故此时机构存在两个死点位置。

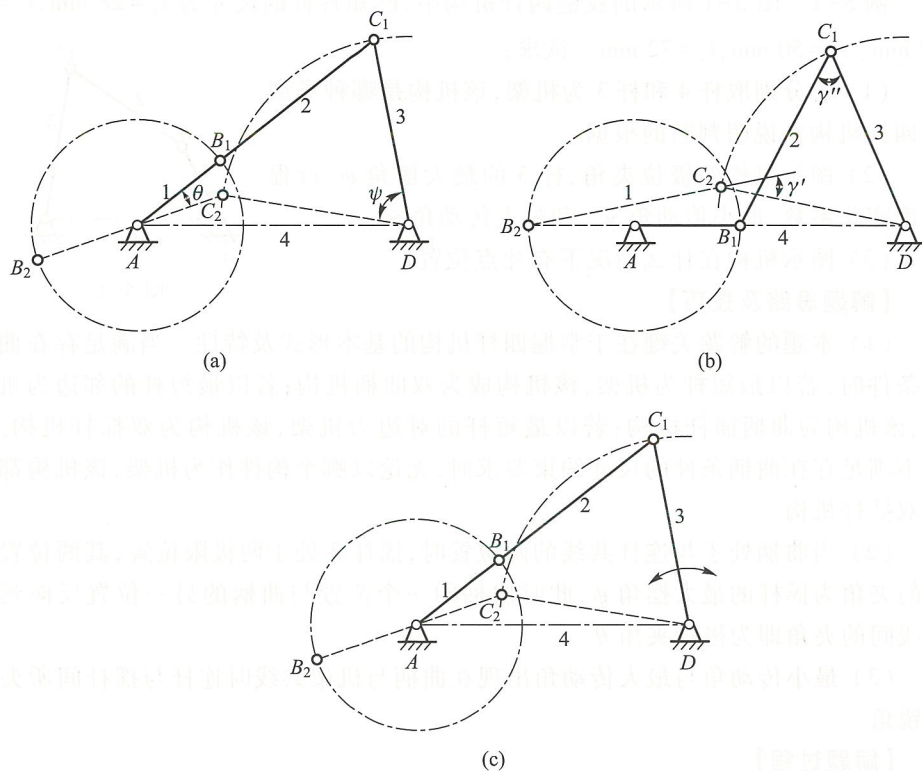


图 5-2

例 5-2 图 5-3 所示的转动导杆机构中, 已知中心距 $AC = 100 \text{ mm}$, $CD = 350 \text{ mm}$, 行程速度变化系数 $K = 2$ 。试求主动件曲柄的长度 AB 及从动件 E 的行程 S 。

【解题思路及技巧】

本题是一个六杆机构, 在解题过程中, 可将其分成导杆机构 ABC 和滑块机构 CDE 。

【解题过程】

(1) 计算极位夹角 θ

$$\theta = \frac{K-1}{K+1} 180^\circ = 60^\circ$$

(2) 作图画出从动件的两个极限位置

如图 5-4 所示, 取比例尺 $\mu_1 = 1 \text{ mm/mm}$, 以点 A 为起始点作两条射线, 分别与 CE 交于点 B_1 与点 B_2 , 且使

$$\angle CAB_1 = \angle CAB_2 = (180^\circ - \theta)/2$$

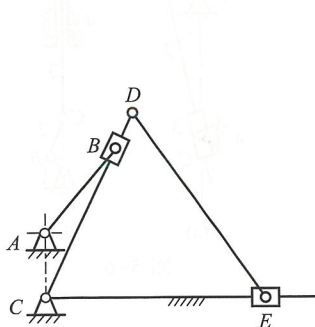


图 5-3

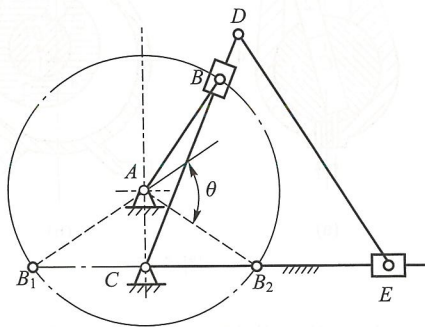


图 5-4

该机构在运动过程中, 从动件 E 的两个极限位置分别对应曲柄的两个位置 AB_1 与 AB_2 。根据三角函数关系, 有

$$AB = \frac{AC}{\cos\left(\frac{1}{2}\angle B_1AB_2\right)} = \frac{AC}{\cos\left[\frac{1}{2}(180^\circ - \theta)\right]} = \frac{AC}{\cos\left(\frac{180^\circ}{K+1}\right)}$$

当 $AC = 100 \text{ mm}$, $K = 2$ 时, 有

$$AB = \frac{AC}{\cos\left(\frac{180^\circ}{K+1}\right)} = \frac{100 \text{ mm}}{\cos 60^\circ} = 200 \text{ mm}$$

(3) 求从动件 E 的行程 S

$$S = 2CD = 2 \times 350 \text{ mm} = 700 \text{ mm}$$

5.4 习题解答

习题 5-1 试从图 5-5 所示两液压泵机构的运动来分析它们属于何种机构。

【解题思路及技巧】

根据机构的运动画出机构运动简图, 即可得到机构的类型。

【解题过程】

(1) 构件 1 绕固定轴心 A 转动, 构件 4 为机架, 构件 3 相对于机架摆动, 摆动中心为构件 3 的几何中心点 C , 构件 2 在构件 3 的长槽中移动, 其机构运动简

图如图 5-6a 所示。该机构是曲柄摇块机构。

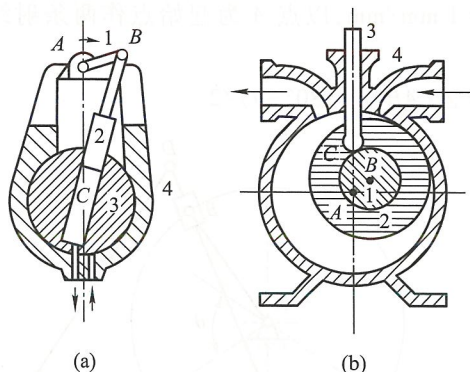


图 5-5

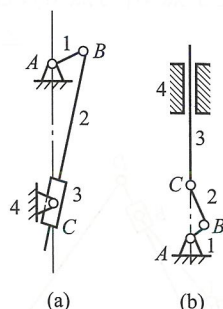


图 5-6

(2) 偏心轮 1 绕轴心 A 转动, 构件 2 被套在偏心轮 1 上, 可相对转动, 其相对转动中心为偏心轮 1 的几何中心 B ; 构件 2 与隔板 3 在点 C 铰接, 可绕点 C 相对摆动, 隔板 3 只能在泵体(机架)4 的竖槽内上下移动。泵工作时, 由于偏心轮的偏距 AB 与构件 2 的外半径之和始终等于泵体油腔部分的内半径, 故构件 2 与泵体 4 构成虚约束, 其机构运动简图如图 5-6b 所示。该机构是曲柄滑块机构。

习题 5-2 图 5-7 所示冲床刀架装置中, 当偏心轮 1 绕固定中心 A 转动时, 构件 2 绕活动中心 C 摆动, 同时推动后者带着刀架 3 上下移动。点 B 为偏心轮的几何中心。问该装置是何种机构? 它是如何演化出来的?

【解题思路及技巧】

根据机构的运动画出机构的运动简图, 即可得到其原始机构。

【解题过程】

根据机构的运动画出机构的运动简图, 如图 5-8 所示, 由机构运动简图可知该装置是曲柄滑块机构。

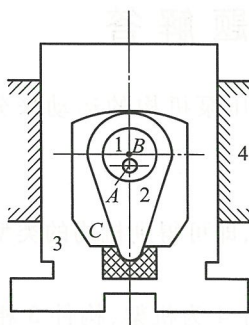


图 5-7



图 5-8

该装置是由图 5-8 所示曲柄滑块机构,通过将转动副 B 半径扩大,将滑块和移动副扩大演化而来的。

习题 5-3 图 5-9 所示铰链四杆机构中,已知:

$l_{BC} = 50 \text{ mm}$, $l_{CD} = 35 \text{ mm}$, $l_{AD} = 30 \text{ mm}$, AD 为机架。

(1) 若此机构为曲柄摇杆机构,且 AB 为曲柄,求 l_{AB} 的最大值。

(2) 若此机构为双曲柄机构,求 l_{AB} 的最小值。

(3) 若此机构为双摇杆机构,求 l_{AB} 的数值。

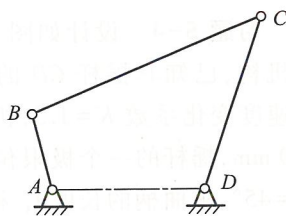


图 5-9

【解题思路及技巧】

本题的关键是熟练应用铰链四杆机构存在曲柄的条件。

【解题过程】

(1) 若此机构为曲柄摇杆机构,杆 AB 为最短杆,由存在曲柄条件得

$$l_{AB} + l_{BC} \leq l_{CD} + l_{AD}$$

$$l_{AB} \leq l_{CD} + l_{AD} - l_{BC} = 15 \text{ mm}$$

l_{AB} 的最大值为 15 mm。

(2) 若此机构为双曲柄机构,则 AD 杆是最短杆,如果 $l_{AB} < l_{BC}$,由存在曲柄条件得

$$l_{AD} + l_{BC} \leq l_{AB} + l_{CD}$$

$$l_{AB} \geq l_{AD} + l_{BC} - l_{CD} = 45 \text{ mm}$$

如果 $l_{AB} > l_{BC}$,由存在曲柄条件得

$$l_{AD} + l_{AB} \leq l_{BC} + l_{CD}$$

$$l_{AB} \leq l_{BC} + l_{CD} - l_{AD} = 55 \text{ mm}$$

所以,该机构若为双曲柄机构,则 l_{AB} 的取值范围是

$$45 \text{ mm} \leq l_{AB} \leq 55 \text{ mm}$$

即 l_{AB} 的最小值是 45 mm。

(3) 若四杆机构既不是曲柄摇杆机构又不是双曲柄机构,则它一定是双摇杆机构。也就是说,当 l_{AB} 的取值不在本题(1)和(2)的范围内时,该机构为双摇杆机构,即

$$15 \text{ mm} < l_{AB} < 45 \text{ mm} \text{ 及 } l_{AB} > 55 \text{ mm}$$

为了保证机构存在, l_{AB} 不能无限大,即

$$l_{AB} < l_{BC} + l_{CD} + l_{AD} = 115 \text{ mm}$$

因此,该机构为双摇杆机构的条件是

$$15 \text{ mm} < l_{AB} < 45 \text{ mm} \text{ 及 } 55 \text{ mm} < l_{AB} < 115 \text{ mm}$$

习题 5-4 设计如图 5-10 所示的铰链四杆机构,已知其摇杆 CD 的长度 $l_{CD} = 75 \text{ mm}$,行程速度变化系数 $K = 1.5$,机架 AD 的长度 $l_{AD} = 100 \text{ mm}$,摇杆的一个极限位置与机架间的夹角 $\varphi'_3 = 45^\circ$,求曲柄的长度 l_{AB} 和连杆的长度 l_{BC} 。

【解题思路及技巧】

本题是按行程速度变化系数进行四杆机构设计问题,关键是计算出极位夹角,然后根据同一圆弧所对应的圆心角或圆周角相等来找到一个圆,该圆上有一段圆弧所对应的圆周角为极位夹角。

【解题过程】

(1) 按行程速度变化系数 $K = 1.5$ 求出极位夹角为

$$\theta = 180^\circ \frac{K-1}{K+1} = 36^\circ$$

(2) 作图。过程如下:

1) 根据 $\angle C_1DA = 45^\circ$ 作出摇杆的第一个极限位置 DC_1 ,如图 5-11 所示。

2) 如图 5-11 所示,以点 D 为圆心,以 DC_1 为半径作圆弧 P 。

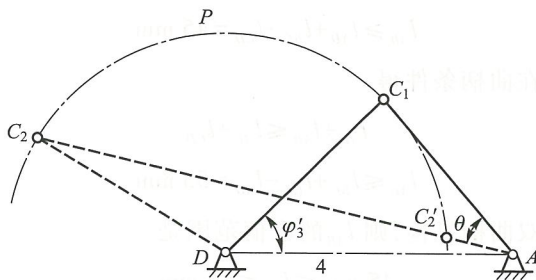


图 5-11

3) 连接 AC_1 ,过 A 点作射线与圆弧 P 交于 C_2 、 C'_2 两点,且使 $\angle C_1AC_2 = \theta = 36^\circ$,则 C_2 与 C'_2 为摇杆的另一极限位置。由图 5-11 可知,此题有两个解。

(3) 求未知杆长

对应摇杆极限位置是 DC_1 和 DC_2 时,由 $\triangle C_1DA$ 得

$$l_{AC1}^2 = l_{AD}^2 + l_{DC1}^2 - 2l_{AD}l_{DC1}\cos\varphi'_3$$

$$l_{AC1} = \sqrt{l_{AD}^2 + l_{DC1}^2 - 2l_{AD}l_{DC1}\cos\varphi'_3} = \sqrt{100^2 + 75^2 - 2 \times 100 \times 75 \times \cos 45^\circ} \text{ mm} = 70.84 \text{ mm}$$

根据正弦定理,有

$$\frac{\sin \angle C_1AD}{l_{DC1}} = \frac{\sin \varphi'_3}{l_{AC1}}$$

$$\sin \angle C_1AD = \frac{\sin \varphi'_3}{l_{AC1}} l_{DC1} = \frac{\sin 45^\circ}{70.84} \times 75 = 0.74863$$

$$\angle C_1AD = 48.472^\circ$$

$$\angle C_2AD = \angle C_1AD - \theta = 48.472^\circ - 36^\circ = 12.472^\circ$$

由 $\triangle C_2DA$ 得

$$l_{DC2}^2 = l_{AD}^2 + l_{AC2}^2 - 2l_{AD}l_{AC2}\cos \angle C_2AD$$

$$l_{AC2}^2 - 2l_{AD}l_{AC2}\cos \angle C_2AD + l_{AD}^2 - l_{DC2}^2 = 0$$

$$l_{AC2} = \frac{2l_{AD}\cos \angle C_2AD \pm \sqrt{4l_{AD}^2\cos^2 \angle C_2AD - 4(l_{AD}^2 - l_{DC2}^2)}}{2}$$

$$= l_{AD}\cos \angle C_2AD \pm \sqrt{l_{AD}^2\cos^2 \angle C_2AD - (l_{AD}^2 - l_{DC2}^2)}$$

$$= (97.64 \pm 71.823) \text{ mm}$$

此时 l_{AC2} 有两个解,一个是

$$l_{AC2} = 97.64 \text{ mm} + 71.823 \text{ mm} = 169.463 \text{ mm}$$

另一个解是

$$l_{AC2} = 97.64 \text{ mm} - 71.823 \text{ mm} = 25.817 \text{ mm}$$

当极限位置是 DC_1 、 DC_2 时

$$l_{AC1} = l_{BC} - l_{AB}$$

$$l_{AC2} = l_{BC} + l_{AB}$$

$$l_{AB} = \frac{l_{AC2} - l_{AC1}}{2} = \frac{169.463 - 70.84}{2} \text{ mm} = 49.3 \text{ mm}$$

$$l_{BC} = \frac{l_{AC2} + l_{AC1}}{2} = \frac{169.463 + 70.84}{2} \text{ mm} = 120.2 \text{ mm}$$

当极限位置是 DC_1 、 DC_2' 时

$$l_{AC1} = l_{BC} + l_{AB}$$

$$l_{AC'2} = l_{BC} - l_{AB}$$

$$l_{AB} = \frac{l_{AC1} - l_{AC'2}}{2} = \frac{70.84 - 25.817}{2} \text{ mm} = 22.5 \text{ mm}$$

$$l_{BC} = \frac{l_{AC1} + l_{AC'2}}{2} = \frac{70.84 + 25.817}{2} \text{ mm} = 48.3 \text{ mm}$$

习题 5-5 设计一曲柄摇杆机构,如图 5-12 所示,已知其摇杆 CD 的长度 $l_{CD} = 290 \text{ mm}$,摇杆两极限位置间的夹角 $\psi = 32^\circ$,行程速度变化系数 $K = 1.25$ 。若曲柄的长度 $l_{AB} = 75 \text{ mm}$,求连杆的长度 l_{BC} 和机架的长度 l_{AD} ,并校验最小传动角 $\gamma_{\min}$ 是否在允许值范围内。

【解题思路及技巧】

本题是按行程速度变化系数进行四杆机构设计问题,关键是计算出极位夹角。

【解题过程】

按行程速度变化系数 $K = 1.25$ 求出极位夹角

$$\theta = 180^\circ \frac{K-1}{K+1} = 20^\circ$$

$$l_{C1C2} = 2l_{CD} \sin\left(\frac{\psi}{2}\right) = 2 \times 290 \text{ mm} \times \sin 16^\circ = 159.87 \text{ mm}$$

在 $\triangle AC_1C_2$ 中

$$l_{AC1} = l_{BC} - l_{AB} = l_{BC} - 75$$

$$l_{AC2} = l_{BC} + l_{AB} = l_{BC} + 75$$

$$\angle C_1AC_2 = \theta = 20^\circ$$

由余弦定理得

$$l_{C1C2}^2 = l_{AC1}^2 + l_{AC2}^2 - 2l_{AC1}l_{AC2}\cos\theta$$

$$159.87^2 = (l_{BC} - 75)^2 + (l_{BC} + 75)^2 - 2(l_{BC} - 75)(l_{BC} + 75)\cos 20^\circ$$

$$l_{BC} = 176.02 \text{ mm}$$

$$l_{AC1} = l_{BC} - l_{AB} = 176.02 \text{ mm} - 75 \text{ mm} = 101.02 \text{ mm}$$

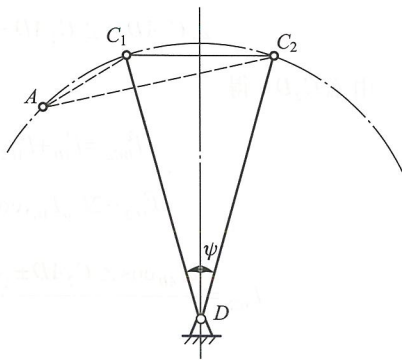


图 5-12

$$l_{AC2} = l_{BC} + l_{AB} = 176.02 \text{ mm} + 75 \text{ mm} = 251.02 \text{ mm}$$

$$\begin{aligned}\cos \angle AC_1 C_2 &= \frac{l_{AC1}^2 + l_{C1C2}^2 - l_{AC2}^2}{2l_{AC1}l_{C1C2}} \\ &= \frac{101.02^2 + 159.87^2 - 251.02^2}{2 \times 101.02 \times 159.87} = -0.8436 \\ \angle AC_1 C_2 &= 147.52^\circ\end{aligned}$$

在 $\triangle AC_1 D$ 中

$$\begin{aligned}\angle AC_1 D &= \angle AC_1 C_2 - \angle DC_1 C_2 = 147.52^\circ - \left(90^\circ - \frac{\psi}{2}\right) = 73.52^\circ \\ l_{AD} &= \sqrt{l_{AC1}^2 + l_{DC1}^2 - 2l_{AC1}l_{DC1}\cos \angle AC_1 D} \\ &= \sqrt{101.02^2 + 290^2 - 2 \times 101.02 \times 290 \times \cos 73.52^\circ} \text{ mm} = 278.72 \text{ mm}\end{aligned}$$

最小传动角可能出现的位置所对应的 $\angle BCD$ 分别为

$$\begin{aligned}\cos \delta_{\min} &= \frac{l_{BC}^2 + l_{CD}^2 - (l_{AD} - l_{AB})^2}{2l_{BC}l_{CD}} = \frac{176.02^2 + 290^2 - (278.72 - 75)^2}{2 \times 176.02 \times 290} = 0.721 \\ \delta_{\min} &= 43.86^\circ\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos \delta_{\max} &= \frac{l_{BC}^2 + l_{CD}^2 - (l_{AD} + l_{AB})^2}{2l_{BC}l_{CD}} = \frac{176.02^2 + 290^2 - (278.72 + 75)^2}{2 \times 176.02 \times 290} = -0.098 \\ \delta_{\max} &= 95.64^\circ\end{aligned}$$

因此 $\gamma' = \delta_{\min} = 43.86^\circ$, $\gamma'' = 180^\circ - \delta_{\max} = 180^\circ - 95.64^\circ = 84.36^\circ$

所以最小传动角 $\gamma_{\min} = \min(\gamma', \gamma'') = 43.86^\circ > 40^\circ$, 即最小传动角在允许的传动角范围内。

习题 5-6 设计一偏置曲柄滑块机构, 如图 5-13 所示, 已知滑块的行程速度变化系数 $K = 1.5$, 滑块的冲程 $l_{C1C2} = 50 \text{ mm}$, 导路的偏距 $e = 20 \text{ mm}$, 求曲柄长度 l_{AB} 和连杆长度 l_{BC} 。

【解题思路及技巧】

本题是按行程速度变化系数进行四杆机构设计问题。

【解题过程】

按行程速度变化系数 $K = 1.5$ 求出极位夹角

$$\theta = 180^\circ \frac{K-1}{K+1} = 36^\circ$$

如图 5-14 所示, 按滑块的冲程作线段 $\overline{C_1 C_2} = 50 \text{ mm}$, 作线段 $C_1 C_2$ 的平行线

$a-a$, 使其距离 C_1C_2 20 mm。过点 C_1 作射线 C_1E 使 $\angle C_2C_1E = 90^\circ - \theta = 54^\circ$, 过点 C_2 作射线 C_2F 使 $\angle C_1C_2F = 90^\circ - \theta = 54^\circ$, C_1E 与 C_2F 的交点为 O 。以 O 为圆心, OC_1 为半径作圆 O , 圆 O 与线 $a-a$ 的交点 A 即为曲柄的固定铰链中心。过 C_2 点作 $C_2M \perp aa$, 垂足为 M 。

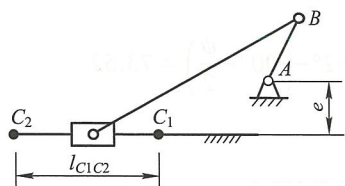


图 5-13

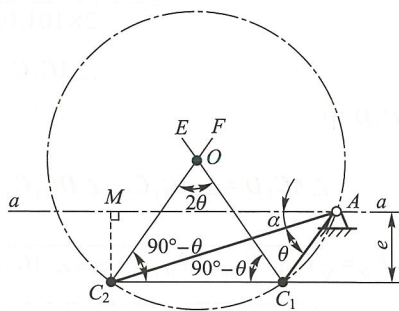


图 5-14

由图 5-14 可知

$$\cot \alpha = \frac{l_{C_1C_2} + e \cot(\alpha + \theta)}{e}$$

$$e \cot^2 \alpha - l_{C_1C_2} \cot \alpha + e - l_{C_1C_2} \cot \theta = 0$$

$$\cot \alpha = \frac{l_{C_1C_2} + \sqrt{l_{C_1C_2}^2 - 4e(e - l_{C_1C_2} \cot \theta)}}{2e} = \frac{50 + \sqrt{50^2 - 4 \times 20 \times (20 - 50 \times \cot 36^\circ)}}{2 \times 20} = 3.25$$

$$\alpha = 17.098^\circ$$

连接 AC_1 与 AC_2 , 则

$$l_{AC_2} = \frac{e}{\sin \alpha} = \frac{20}{\sin 17.098^\circ} \text{ mm} = 68.02 \text{ mm}$$

$$l_{AC_1} = \frac{e}{\sin(\alpha + \theta)} = \frac{20}{\sin(17.098^\circ + 36^\circ)} \text{ mm} = 25.01 \text{ mm}$$

$$l_{AC_1} = l_{BC} - l_{AB}$$

$$l_{AC_2} = l_{BC} + l_{AB}$$

$$l_{AB} = \frac{l_{AC_2} - l_{AC_1}}{2} = \frac{68.02 - 25.01}{2} \text{ mm} = 21.505 \text{ mm}$$

$$l_{BC} = \frac{l_{AC_2} + l_{AC_1}}{2} = \frac{68.02 + 25.01}{2} \text{ mm} = 46.515 \text{ mm}$$

习题 5-7 设计一曲柄摇杆机构 $ABCD$, 如图 5-15 所示。已知摇杆的行程速度变化系数 $K=1$, 摇杆的长度为 $l_{CD}=50\text{ mm}$, 摇杆两极限位置与机架 AD 的夹角分别为 $\varphi_1=30^\circ$ 和 $\varphi_2=90^\circ$, 求该机构的其他未知杆长。

【解题思路及技巧】

本题的解题关键是知道行程速度变化系数 $K=1$ 时, 极位夹角为 0° , 即 A 、 B_1 、 B_2 、 C_1 及 C_2 五点共线。

【解题过程】

由于摇杆的行程速度变化系数 $K=1$, 所以极位夹角为 0° 。极位夹角为 0° 意味着 A 、 B_1 、 B_2 、 C_1 及 C_2 五点共线, 所以连接点 C_2 和点 C_1 并延长, 与机架的交点即为固定铰链 A 的位置, 如图 5-16 所示。在 $\triangle C_1C_2D$ 中, 由于 $\angle C_1DC_2=\varphi_2-\varphi_1=90^\circ-30^\circ=60^\circ$ 及 $l_{C_1D}=l_{C_2D}$, 所以 $\triangle C_1C_2D$ 为正三角形, 即 $l_{C_1C_2}=l_{C_1D}=l_{C_2D}=50\text{ mm}$ 、 $\angle C_1C_2D=\angle C_2C_1D=\angle C_2DC_1=60^\circ$ 。

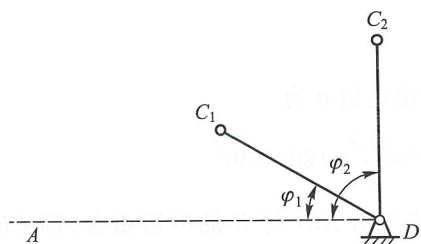


图 5-15

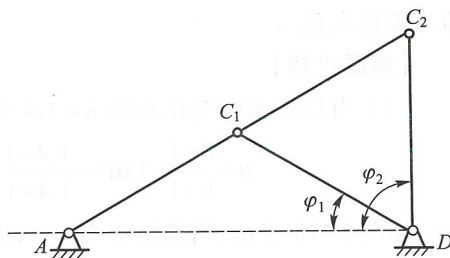


图 5-16

在 $\triangle C_2AD$ 中,

$$\angle C_2AD = 180^\circ - \varphi_2 - \angle C_1C_2D = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

$$\sin \angle C_2AD = \frac{l_{C_2D}}{l_{AC_2}}$$

$$l_{AC_2} = \frac{l_{C_2D}}{\sin \angle C_2AD} = \frac{50\text{ mm}}{\sin 30^\circ} = 100\text{ mm}$$

$$l_{AD} = l_{AC_2} \cos \angle C_2AD = 100\text{ mm} \times \cos 30^\circ = 86.6025\text{ mm}$$

$$l_{AC_1} = l_{AC_2} - l_{C_1C_2} = 100\text{ mm} - 50\text{ mm} = 50\text{ mm}$$

$$l_{AC_2} = l_{BC} + l_{AB}$$

$$l_{AC_1} = l_{BC} - l_{AB}$$

$$l_{AB} = \frac{l_{AC2} - l_{AC1}}{2} = \frac{100 - 50}{2} \text{ mm} = 25 \text{ mm}$$

$$l_{BC} = \frac{l_{AC1} + l_{AC2}}{2} = \frac{100 + 50}{2} \text{ mm} = 75 \text{ mm}$$

习题 5-8 图 5-17 所示插床的转动导杆机构中, 已知 $l_{AC} = 50 \text{ mm}$, $l_{CD} = 40 \text{ mm}$, 行程速度变化系数 $K = 1.4$, 求曲柄 AB 的长度和插刀 E 的行程。又若需行程速度变化系数 $K = 2$, 则曲柄 AB 的长度应为多少? 此时插刀的行程是否改变?

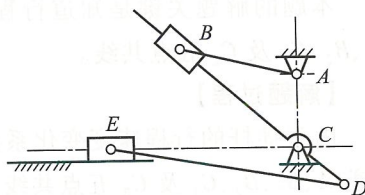


图 5-17

【解题思路及技巧】

本题是一个六杆机构, 其解题关键是深刻理解极位夹角。从动件(滑块 E) 处于两极限位置时, 所对应主动件的一个位置与另一位置反向延长线间的夹角即为极位夹角。

【解题过程】

(1) 当行程速度变化系数 $K = 1.4$ 时, 极位夹角 θ 为

$$\theta = \frac{K-1}{K+1} \times 180^\circ = \frac{1.4-1}{1.4+1} \times 180^\circ = \frac{0.4}{2.4} \times 180^\circ = 30^\circ$$

如图 5-18 所示, 当滑块 E 处于两极限位置时, CD 与 E 的滑道重合, 即 CB 位于滑块 E 的滑道上, 因此得到铰链点 B 的两个位置 B_1 与 B_2 。曲柄位置 AB_2 与 AB_1 反向延长线间的夹角即为极位夹角 θ 。由图 5-18 可以看出

$$\theta = 180^\circ - \angle B_1AB_2$$

$$\angle B_1AB_2 = 180^\circ - \theta = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$$

$$l_{AB} = \frac{l_{AC}}{\cos\left(\frac{1}{2}\angle B_1AB_2\right)} = \frac{50}{\cos 75^\circ} \text{ mm} = 193.185 \text{ mm}$$

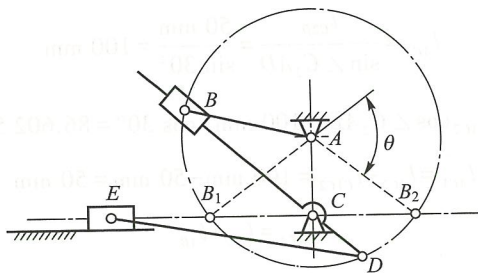


图 5-18

$$\theta = \frac{K-1}{K+1} \times 180^\circ = \frac{2-1}{2+1} \times 180^\circ = \frac{1}{3} \times 180^\circ = 60^\circ$$
$$\theta = 180^\circ - \angle B_1AB_2$$

$$\angle B_1AB_2 = 180^\circ - \theta = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

$$l_{AB} = \frac{l_{AC}}{\cos\left(\frac{1}{2} \angle B_1AB_2\right)} = \frac{50}{\cos 60^\circ} \text{ mm} = 100 \text{ mm}$$

习题 5-9 图 5-19 所示六杆机构中, 已知 AB 为曲柄, 且为主动件, 摇杆 DC

的行程速度变化系数 $K=1$, 滑块行程 $\overline{F_1 F_2}=300 \text{ mm}$, $e=100 \text{ mm}$, $x=400 \text{ mm}$, 摇杆的极限位置为 DE_1 和 DE_2 , $\varphi_1=45^\circ$, $\varphi_2=90^\circ$, $l_{EC}=l_{CD}$, 且点 A 、 D 在平行于滑道的一条水平线上。试求出该机构各杆的尺寸。

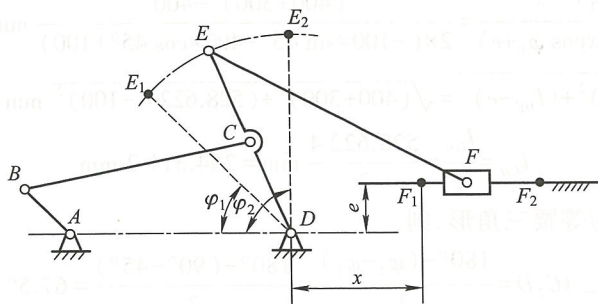


图 5-19

【解题思路及技巧】

本题是一个六杆机构,其解题关键是要知道行程速度变化系数 $K=1$ 时,极位夹角 $\theta=0$, A, B_1, B_2, C_1, C_2 五点共线,然后根据直角三角形中边的关系求解。

【解题过程】

如图 5-20 所示,以点 D 为圆心、 l_{CD} 为半径作圆,该圆与 DE_1 、 DE_2 的交点分别为点 C_1 、 C_2 。连接点 E_1 、 F_1 及点 E_2 、 F_2 。因为行程速度变化系数 $K=1$,所以 A 、 C_1 、 C_2 三点共线。摇杆 CD 在两个极限位置分别有

$$\begin{cases} l_{EF}^2 - (l_{DE} \sin \varphi_1 - e)^2 = (x + l_{DE} \cos \varphi_1)^2 & (a) \\ l_{EF}^2 - (l_{DE} - e)^2 = (x + \overline{F_1 F_2})^2 & (b) \end{cases}$$

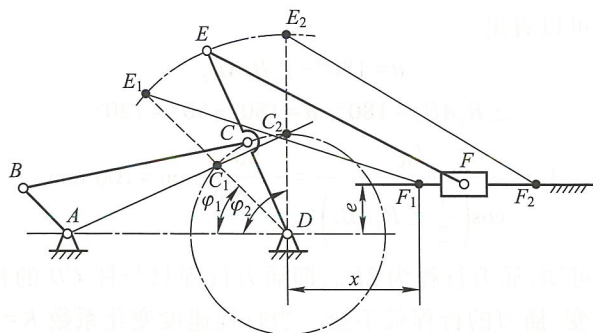


图 5-20

联立式(a)与式(b)得

$$(l_{DE} \sin \varphi_1 - e)^2 + (x + l_{DE} \cos \varphi_1)^2 - (l_{DE} - e)^2 = (x + \overline{F_1 F_2})^2$$

$$l_{DE}^2 \sin^2 \varphi_1 - 2el_{DE} \sin \varphi_1 + e^2 + x^2 + 2xl_{DE} \cos \varphi_1 + l_{DE}^2 \cos^2 \varphi_1 - l_{DE}^2 + 2el_{DE} - e^2 = (x + \overline{F_1 F_2})^2$$

$$l_{DE} = \frac{(x + \overline{F_1 F_2})^2 - x^2}{2(-e \sin \varphi_1 + x \cos \varphi_1 + e)} = \frac{(400 + 300)^2 - 400^2}{2 \times (-100 \times \sin 45^\circ + 400 \times \cos 45^\circ + 100)} \text{ mm} = 528.622 \text{ 4 mm}$$

$$l_{EF} = \sqrt{(x + \overline{F_1 F_2})^2 + (l_{DE} - e)^2} = \sqrt{(400 + 300)^2 + (528.622 \text{ 4} - 100)^2} \text{ mm} = 820.802 \text{ 8 mm}$$

$$l_{CD} = \frac{l_{DE}}{2} = \frac{528.622 \text{ 4}}{2} \text{ mm} = 264.311 \text{ 2 mm}$$

$\triangle C_1 C_2 D$ 为等腰三角形, 则

$$\angle AC_2 D = \frac{180^\circ - (\varphi_2 - \varphi_1)}{2} = \frac{180^\circ - (90^\circ - 45^\circ)}{2} = 67.5^\circ$$

$$l_{AD} = l_{CD} \tan \angle AC_2 D = 264.311 \text{ 2} \times \tan 67.5^\circ \text{ mm} = 638.103 \text{ 7 mm}$$

$$\overline{AC_2} = \frac{l_{CD}}{\cos \angle AC_2 D} = \frac{264.311 \text{ 2}}{\cos 67.5^\circ} \text{ mm} = 690.678 \text{ 5 mm}$$

$$\overline{AC_1} = \frac{l_{CD} \sin \varphi_1}{\sin \angle C_2 A D} = \frac{264.311 \text{ 2} \times \sin 45^\circ}{\sin (90^\circ - 67.5^\circ)} \text{ mm} = 488.383 \text{ 4 mm}$$

$$l_{BC} + l_{AB} = \overline{AC_2}$$

$$l_{BC} - l_{AB} = \overline{AC_1}$$

$$l_{BC} = \frac{\overline{AC_2} + \overline{AC_1}}{2} = \frac{690.678 \text{ 5} + 488.383 \text{ 4}}{2} \text{ mm} = 589.531 \text{ 0 mm}$$

$$l_{AB} = \frac{\overline{AC_2} - \overline{AC_1}}{2} = \frac{690.678\ 5 - 488.383\ 4}{2} \text{ mm} = 101.147\ 6 \text{ mm}$$

习题 5-10 在图 5-21 所示牛头刨床的摆动导杆机构中, 已知中心距 $l_{AC} = 300 \text{ mm}$, 刨头的冲程 $H = 450 \text{ mm}$, 刨头空回行程最大速度 $v_{\text{回}(\text{max})}$ 与工作行程最大速度 $v_{\text{工}(\text{max})}$ 之比 $K = \frac{v_{\text{回}(\text{max})}}{v_{\text{工}(\text{max})}} = 2$, 试求曲柄 AB 和导杆 CD 的长度。

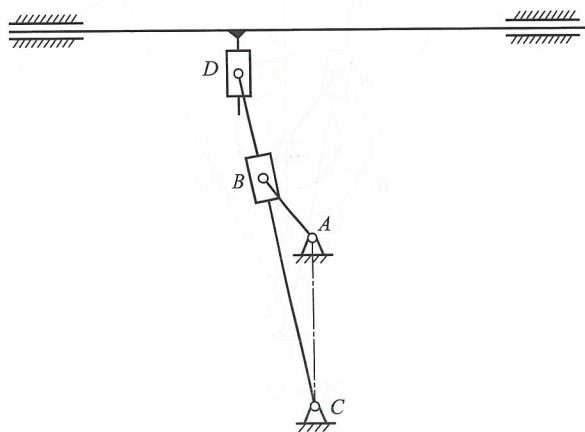


图 5-21

【解题思路及技巧】

本题是瞬时速度比问题, 要注意其与行程速度变化系数(平均速度比)的区别。

【解题过程】

如图 5-22 所示, 当曲柄 AB 匀速转动时, 作往复摆动的导杆, 其角速度 ω 有两个极值位置 E 和 F , 设空回程时导杆摆动的最大角速度为 ω_E 、工作行程时导杆摆动的最大角速度为 ω_F 。因

$$\begin{cases} v_{\text{回}(\text{max})} = l_{CD} \omega_E \\ v_{\text{工}(\text{max})} = l_{CD} \omega_F \end{cases}$$

所以

$$K = \frac{v_{\text{回}(\text{max})}}{v_{\text{工}(\text{max})}} = \frac{\omega_E}{\omega_F} = \frac{\frac{v_B}{l_{AC} - l_{AB}}}{\frac{v_B}{l_{AC} + l_{AB}}} = \frac{l_{AC} + l_{AB}}{l_{AC} - l_{AB}} = 2$$

即

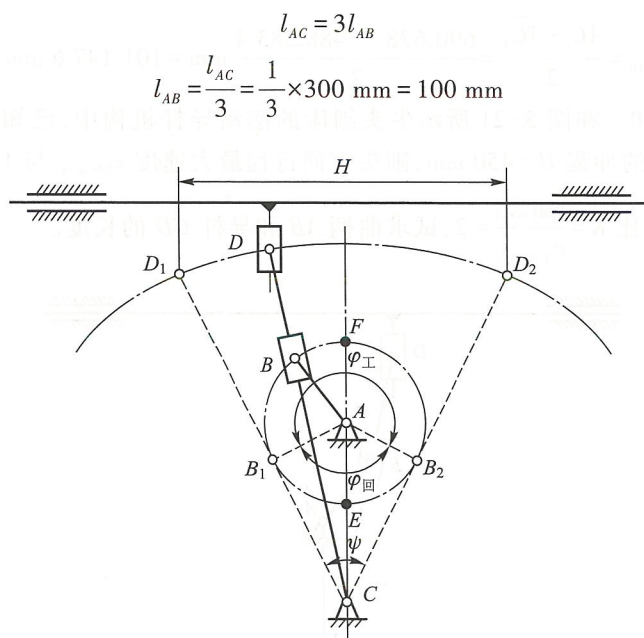


图 5-22

又因

$$\sin \frac{\psi}{2} = \frac{l_{AB}}{l_{AC}} = \frac{100}{300} = \frac{1}{3}$$

而

$$l_{CD} \sin \frac{\psi}{2} = \frac{H}{2}$$

故

$$l_{CD} = \frac{H}{2} \times \frac{1}{\sin \frac{\psi}{2}} = \frac{450}{2} \times 3 \text{ mm} = 675 \text{ mm}$$

习题 5-11 如图 5-23 所示, 已知两连架杆的三组对应位置为: $\varphi_1 = 60^\circ$, $\psi_1 = 30^\circ$; $\varphi_2 = 90^\circ$, $\psi_2 = 50^\circ$; $\varphi_3 = 120^\circ$, $\psi_3 = 80^\circ$, 若取机架 AD 长度 $l_{AD} = 100 \text{ mm}$, 试用解析法计算此铰链四杆机构各杆的长度。

【解题思路及技巧】

本题是用解析法进行函数机构设计问题, 直接按主教材中的公式计算即可。

【解题过程】

根据函数机构设计的计算公式

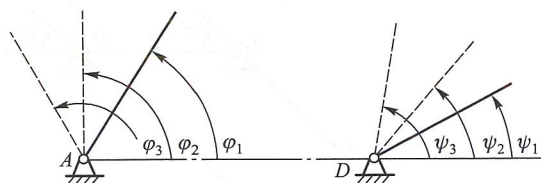


图 5-23

$$R_1 - R_2 \cos(\varphi_0 + \varphi) + R_3 \cos(\psi_0 + \psi) = \cos[(\varphi - \psi) + (\varphi_0 - \psi_0)] \quad (\text{a})$$

式中

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= (a^2 + c^2 + d^2 - b^2) / 2ac \\ R_2 &= d/c \\ R_3 &= d/a \end{aligned} \right\} \quad (\text{b})$$

将给定的两连架杆三组对应位置 $\varphi_1 = 60^\circ, \psi_1 = 30^\circ; \varphi_2 = 90^\circ, \psi_2 = 50^\circ; \varphi_3 = 120^\circ, \psi_3 = 80^\circ$ 代入式 (a), 并设 $\varphi_0 = \psi_0 = 0^\circ$ 得

$$\begin{cases} R_1 - R_2 \cos \varphi_1 + R_3 \cos \psi_1 = \cos(\varphi_1 - \psi_1) \\ R_1 - R_2 \cos \varphi_2 + R_3 \cos \psi_2 = \cos(\varphi_2 - \psi_2) \\ R_1 - R_2 \cos \varphi_3 + R_3 \cos \psi_3 = \cos(\varphi_3 - \psi_3) \end{cases}$$

代入数值得

$$\begin{cases} R_1 - R_2 \cos 60^\circ + R_3 \cos 30^\circ = \cos(60^\circ - 30^\circ) \\ R_1 - R_2 \cos 90^\circ + R_3 \cos 50^\circ = \cos(90^\circ - 50^\circ) \\ R_1 - R_2 \cos 120^\circ + R_3 \cos 80^\circ = \cos(120^\circ - 80^\circ) \end{cases}$$

解此线性方程组得

$$R_1 = 1.0299, R_2 = -0.3852, R_3 = -0.4105$$

将 R_1, R_2, R_3 和 $d = l_{AD} = 100 \text{ mm}$ 代入式 (b) 得四杆机构的尺寸为

$$a = \frac{d}{R_3} = \frac{100 \text{ mm}}{-0.4105} = -243.61 \text{ mm}$$

$$c = \frac{d}{R_2} = \frac{100 \text{ mm}}{-0.3852} = -259.61 \text{ mm}$$

$$\begin{aligned} b &= \sqrt{(a^2 + c^2 + d^2) - 2acR_1} \\ &= \sqrt{[(-243.61)^2 + (-259.61)^2 + 100^2] - 2 \times (-243.61) \times (-259.61) \times 1.0299} \text{ mm} \\ &= 80.46 \text{ mm} \end{aligned}$$

杆长为负值说明杆的方向与公式中规定的方向相反。机构简图如图 5-24 所示。

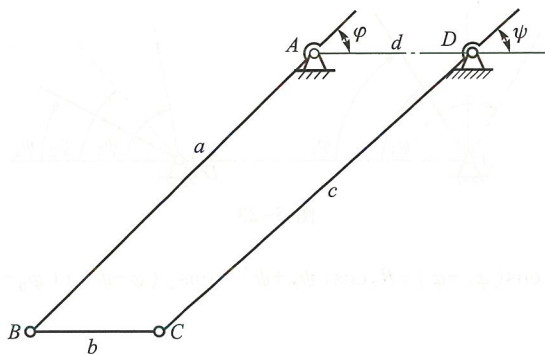


图 5-24

习题 5-12 试设计一铰链四杆机构, 近似实现函数 $y = \lg x$ 。

(1) 设 x 的变化区间为 $1 \leq x \leq 2$, 先用解析法求出此机构, 再用数值比较法的程序计算, 并比较其结果。

(2) 多次改变 x 的变化区间, 用数值比较法求出结果, 分析其变化情况。

【解题过程】

(1) 首先, 将 $y = \lg x$ 转化成两连架杆间的角度关系, 按数值比较法进行转化。设 $\varphi_0 = 0, \psi_0 = 0, \varphi_m = 100, \psi_m = 50$, 则换算比例系数 μ_x, μ_y 为

$$\left. \begin{aligned} \mu_x &= \frac{x - x_0}{\varphi} = \frac{x_m - x_0}{\varphi_m} = \frac{2 - 1}{100} = \frac{1}{100} \\ \mu_y &= \frac{y - y_0}{\psi} = \frac{y_m - y_0}{\psi_m} = \frac{\lg 2 - \lg 1}{50} = \frac{0.301}{50} \end{aligned} \right\}$$

由 $\mu_x = \frac{x - x_0}{\varphi} = \frac{1}{100}$ 可得 $x = x_0 + 0.01\varphi$, 从而得两连架杆间的函数关系

$$\psi = \frac{y - y_0}{\mu_y} = \frac{f(x) - y_0}{\mu_y} = \frac{\lg(1 + 0.01\varphi)}{\frac{0.301}{50}} = \frac{50 \lg(1 + 0.01\varphi)}{0.301}$$

取连架杆的三组对应位置关系, 令 $\varphi_{11} = 30^\circ, \varphi_{12} = 60^\circ, \varphi_{13} = 100^\circ$, 则 $\psi_{11} = 18.93^\circ, \psi_{12} = 33.91^\circ, \psi_{13} = 50^\circ$ 。根据习题 5-11 中式 (a) 得

$$R_1 - R_2 \cos 30^\circ + R_3 \cos 18.93^\circ = \cos(30^\circ - 18.93^\circ)$$

$$R_1 - R_2 \cos 60^\circ + R_3 \cos 33.91^\circ = \cos(60^\circ - 33.91^\circ)$$

$$R_1 - R_2 \cos 100^\circ + R_3 \cos 50^\circ = \cos(100^\circ - 50^\circ)$$

解此线性方程组得

$$R_1 = 3.383, \quad R_2 = -1.454, \quad R_3 = -3.87$$

取 $d=20\text{ mm}$, 将 R_1 、 R_2 和 R_3 之值和 $d=l_{AD}=20\text{ mm}$ 代入习题 5-11 中式(b)得四杆机构尺寸为

$$a=-5.1682\text{ mm}, \quad b=11.6172\text{ mm}, \quad c=-13.7554\text{ mm}, \quad d=20\text{ mm}$$

其中 a 、 c 为负值, 说明杆长与公式中规定的方向相反。

(2) 运用数值比较法提供的软件进行函数机构综合, 设定参数如图 5-25 所示。

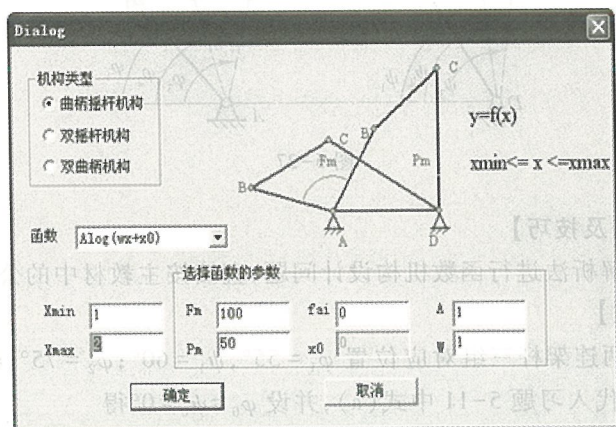


图 5-25

选择 B 、 C 、 D 三点顺时针排列, 则可得到一个解, 如图 5-26 所示。

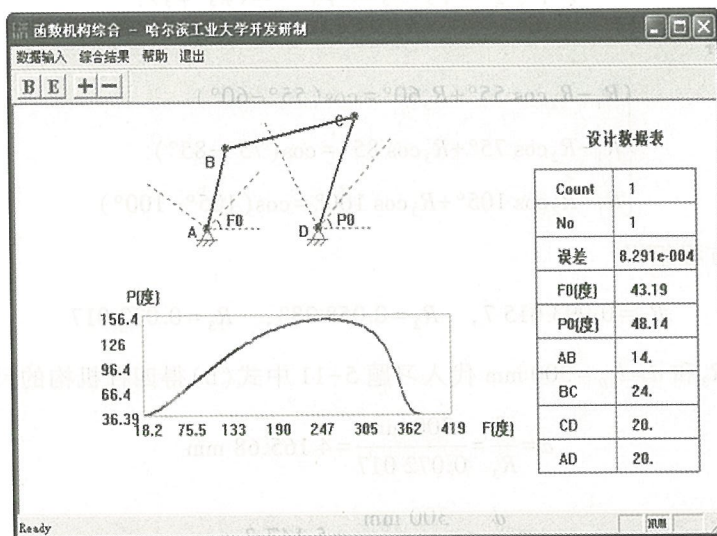


图 5-26

习题 5-13 如图 5-27 所示,当连架杆 AB 处于 A_1B_1 、 A_2B_2 和 A_3B_3 位置,另一连架杆 CD 上的某一标线 DE 对应处于位置 DE_1 、 DE_2 和 DE_3 时,两连架杆所对应的角位置分别为: $\varphi_1 = 55^\circ, \psi_1 = 60^\circ$; $\varphi_2 = 75^\circ, \psi_2 = 85^\circ$; $\varphi_3 = 105^\circ, \psi_3 = 100^\circ$ 。若给定 $l_{AD} = 300 \text{ mm}$,试设计此铰链四杆机构,并讨论是否还可以再给定其他杆长限制(如再给定 $l_{AB} = 100 \text{ mm}$)设计出该机构。

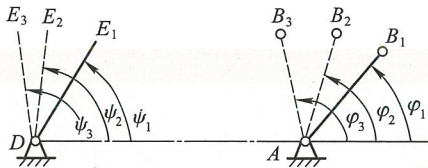


图 5-27

【解题思路及技巧】

本题是用解析法进行函数机构设计问题,直接按主教材中的公式计算即可。

【解题过程】

将给定的两连架杆三组对应位置 $\varphi_1 = 55^\circ, \psi_1 = 60^\circ$; $\varphi_2 = 75^\circ, \psi_2 = 85^\circ$; $\varphi_3 = 105^\circ, \psi_3 = 100^\circ$ 代入习题 5-11 中式(a),并设 $\varphi_0 = \psi_0 = 0^\circ$ 得

$$\begin{cases} R_1 - R_2 \cos \varphi_1 + R_3 \cos \psi_1 = \cos(\varphi_1 - \psi_1) \\ R_1 - R_2 \cos \varphi_2 + R_3 \cos \psi_2 = \cos(\varphi_2 - \psi_2) \\ R_1 - R_2 \cos \varphi_3 + R_3 \cos \psi_3 = \cos(\varphi_3 - \psi_3) \end{cases}$$

代入数值得

$$\begin{cases} R_1 - R_2 \cos 55^\circ + R_3 \cos 60^\circ = \cos(55^\circ - 60^\circ) \\ R_1 - R_2 \cos 75^\circ + R_3 \cos 85^\circ = \cos(75^\circ - 85^\circ) \\ R_1 - R_2 \cos 105^\circ + R_3 \cos 100^\circ = \cos(105^\circ - 100^\circ) \end{cases}$$

解此线性方程组得

$$R_1 = 0.993\ 615\ 7, \quad R_2 = 0.058\ 283, \quad R_3 = 0.072\ 017$$

将 R_1 、 R_2 、 R_3 和 $d = l_{AD} = 300 \text{ mm}$ 代入习题 5-11 中式(b)得四杆机构的尺寸为

$$a = \frac{d}{R_3} = \frac{300 \text{ mm}}{0.072\ 017} = 4\ 165.68 \text{ mm}$$

$$c = \frac{d}{R_2} = \frac{300 \text{ mm}}{0.058\ 283} = 5\ 147.3 \text{ mm}$$

$$\begin{aligned}
 b &= \sqrt{(a^2 + c^2 + d^2) - 2acdR_1} \\
 &= \sqrt{(4\,165.68^2 + 5\,147.3^2 + 300^2) - 2 \times 4\,165.68 \times 5\,147.3 \times 0.993\,615\,7} \text{ mm} \\
 &= 1\,152.11 \text{ mm}
 \end{aligned}$$

如果再给定 $l_{AB} = 100 \text{ mm}$, 则 $R_3 = \frac{d}{a} = 3$ 成为已知量, 这样在设计时初始角 φ_0

和 ψ_0 不能同时为 0。

习题 5-14 图 5-28 所示颚式破碎机, 已知行程速度变化系数 $K=1.2$, 颚板长度 $l_{CD} = 350 \text{ mm}$, 摆角 $\psi = 35^\circ$, 曲柄长度 $l_{AB} = 80 \text{ mm}$, 试确定该机构的连杆 BC 和机架 AD 的长度, 并验算其最小传动角 $\gamma_{\min}$ 是否在允许范围内。

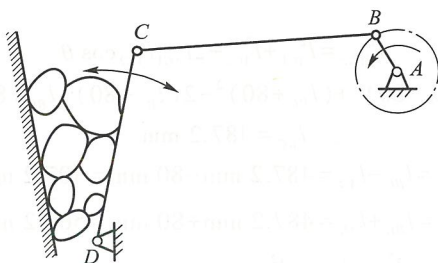


图 5-28

【解题思路及技巧】

本题是按行程速度变化系数进行四杆机构设计问题。

【解题过程】

(1) 按行程速度变化系数 $K=1.2$ 求出极位夹角

$$\theta = 180^\circ \frac{K-1}{K+1} = 16.364^\circ$$

(2) 作图

1) 如图 5-29 所示, 任取固定铰链中心 D 的位置, 作出颚板的两个极限位置 C_1D 和 C_2D ;

2) 连接 C_1C_2 , 过点 C_1 作射线 $C_1E \perp C_1C_2$;

3) 过点 C_2 作射线 C_2F , 使 C_2F 与 C_1C_2 间的夹角为 $90^\circ - \theta$, 射线 C_1E 与 C_2F 的交点为 M ;

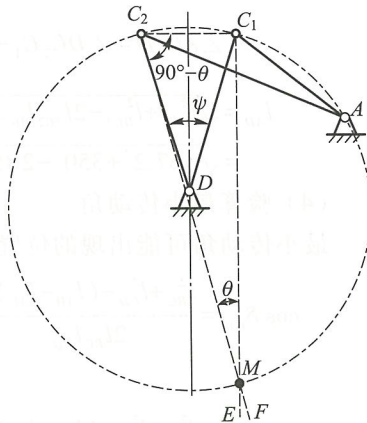


图 5-29

4) 过 C_1 、 C_2 和 M 三点作圆;

5) 在圆上选一点作为曲柄的回转中心 A 。

(3) 求未知杆长

由图 5-29 可得

$$l_{C_1C_2} = 2l_{CD} \sin \frac{\psi}{2} = 2 \times 350 \text{ mm} \times \sin \frac{35^\circ}{2} = 210.494 \text{ mm}$$

在 $\triangle AC_1C_2$ 中

$$l_{AC_1} = l_{BC} - l_{AB} = l_{BC} - 80$$

$$l_{AC_2} = l_{BC} + l_{AB} = l_{BC} + 80$$

$$\angle C_1AC_2 = \theta = 16.364^\circ$$

由余弦定理得

$$l_{C_1C_2}^2 = l_{AC_1}^2 + l_{AC_2}^2 - 2l_{AC_1}l_{AC_2}\cos\theta$$

$$210.494^2 = (l_{BC} - 80)^2 + (l_{BC} + 80)^2 - 2(l_{BC} - 80)(l_{BC} + 80)\cos 16.364^\circ$$

$$l_{BC} = 487.2 \text{ mm}$$

$$l_{AC_1} = l_{BC} - l_{AB} = 487.2 \text{ mm} - 80 \text{ mm} = 407.2 \text{ mm}$$

$$l_{AC_2} = l_{BC} + l_{AB} = 487.2 \text{ mm} + 80 \text{ mm} = 567.2 \text{ mm}$$

$$\begin{aligned} \cos \angle AC_2C_1 &= \frac{l_{AC_2}^2 + l_{C_1C_2}^2 - l_{AC_1}^2}{2l_{AC_2}l_{C_1C_2}} \\ &= \frac{210.494^2 + 567.2^2 - 407.2^2}{2 \times 567.2 \times 210.494} = 0.838462 \end{aligned}$$

$$\angle AC_2C_1 = 33.02^\circ$$

在 $\triangle AC_2D$ 中

$$\angle AC_2D = \angle DC_2C_1 - \angle AC_2C_1 = \frac{180^\circ - \psi}{2} - 33.02^\circ = 39.48^\circ$$

$$\begin{aligned} l_{AD} &= \sqrt{l_{AC_2}^2 + l_{DC_2}^2 - 2l_{AC_2}l_{DC_2}\cos \angle AC_2D} \\ &= \sqrt{567.2^2 + 350^2 - 2 \times 567.2 \times 350 \times \cos 39.48^\circ} \text{ mm} = 371.16 \text{ mm} \end{aligned}$$

(4) 验算最小传动角

最小传动角可能出现的位置所对应的 $\angle BCD$ 分别为

$$\cos \delta_{\min} = \frac{l_{BC}^2 + l_{CD}^2 - (l_{AD} - l_{AB})^2}{2l_{BC}l_{CD}} = \frac{487.2^2 + 350^2 - (371.16 - 80)^2}{2 \times 487.2 \times 350} = 0.8066$$

$$\delta_{\min} = 36.23^\circ$$

$$\cos \delta_{\max} = \frac{l_{BC}^2 + l_{CD}^2 - (l_{AD} + l_{AB})^2}{2l_{BC}l_{CD}} = \frac{487.2^2 + 350^2 - (371.16 + 80)^2}{2 \times 487.2 \times 350} = 0.4584$$

$$\delta_{\max} = 62.72^\circ$$

最小传动角 $\gamma_{\min} = \delta_{\min} = 36.23^\circ < 40^\circ$, 不在允许范围内。

习题 5-15 用铰链四杆机构作电炉炉门的启闭机构, 已知其两活动铰链中心 B 、 C 的位置及炉门的两个位置尺寸如图 5-30 所示。试确定固定铰链中心 A 、 D 位置及 AB 和 CD 的杆长。

【解题思路及技巧】

本题是用图解法进行导引机构设计问题。

【解题过程】

选炉门开启位置为起始位置, 选取比例尺 μ_l 作机构简图, 如图 5-31 所示。连接 C_1 和 C_2 , 并作 C_1C_2 的垂直平分线 C_{12} ; 同理, 连接 B_1 和 B_2 , 并作 B_1B_2 的垂直平分线 B_{12} , 在炉门处于垂直位置处选一条机架线 (如距炉门底壁 15 mm), 该线与 B_{12} 和 C_{12} 的交点分别为固定铰链中心 A 和 D 。量取图中的 AB_1 、 B_1C_1 、 C_1D 和 AD 长度并转换成实际尺寸, 则得所设计机构的实际杆长分别为

$$l_{AB} = 96.18 \text{ mm}$$

$$l_{AD} = 308 \text{ mm}$$

$$l_{CD} = 263.43 \text{ mm}$$

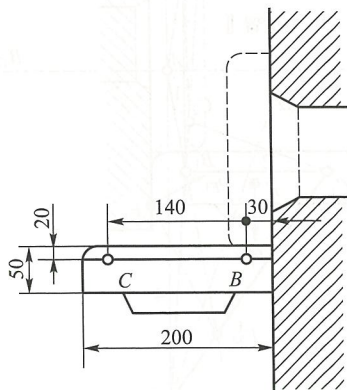


图 5-30

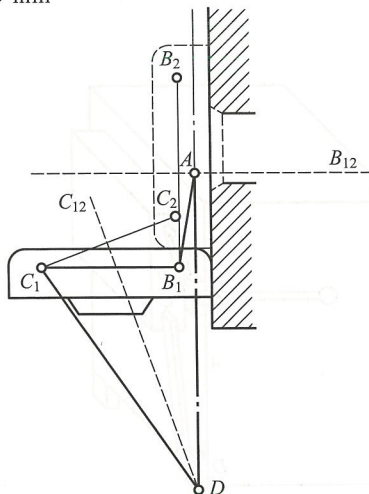


图 5-31

实际上, 在选择点 A 和点 D 时, 要考虑一些附加条件, 例如机构尺寸不可太大, 并且要便于将机构安装在炉体上, 例如图 5-32 中选在图示点 A 和点 D 位置。这时必须检查传动角 γ , 如果 γ 过小, 则炉门可能根本打不开。再者, 还必须检查炉门体上一些关键点的轨迹, 例如图 5-33 中位置 I 的点 E_1 , 当炉门开始关闭时, 如果沿其轨迹切线方向的速度 v_{E1} 指向炉壁, 则炉门与炉壁发生干涉。

同理,位置Ⅱ的点 E_2 ,当炉门打开的瞬间,如果沿其轨迹切线方向的速度 v_{E2} 指向炉壁,则炉门无法离开位置Ⅱ。图5-33中所选的点 A 和点 D ,能使机构在位置Ⅰ时连杆2(炉门)与构件4(炉体)的速度瞬心 P_{24}^I 位于图示的位置,在关闭炉门时,连杆2绕点 P_{24}^I 沿逆时针方向转动,点 E_1 的速度方向垂直于连线 $E_1P_{24}^I$,而指向炉体之外,因此炉门可以关闭;同理,当机构在位置Ⅱ时,连杆2(炉门)与构件4(炉体)的速度瞬心 P_{24}^{II} 位于图示位置,在打开炉门时,连杆2绕点 P_{24}^{II} 沿顺时针方向转动,因此点 E_2 的速度方向垂直于连线 $E_2P_{24}^{II}$ 而指向炉体之外,因此炉门可以打开。此外,在炉门位于打开的位置Ⅰ时,炉门重心位于点 F 处,重力 G 对速度瞬心 P_{24}^I 形成逆时针方向的重力矩,使得在放松操纵把手之后,炉门在重力矩作用之下不能靠在炉体上形成倾斜背面,不便于利用炉门的背面放置热处理零件,因此应在炉门打开后将操纵把手加以固定。如果设计时能使速度瞬心 P_{24}^I 位于重力作用线的右侧,则可以使炉门在重力矩作用下自动稳定地靠在炉体上。

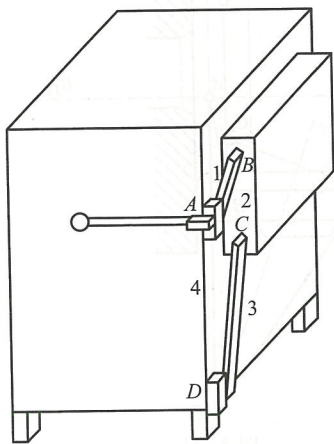


图 5-32

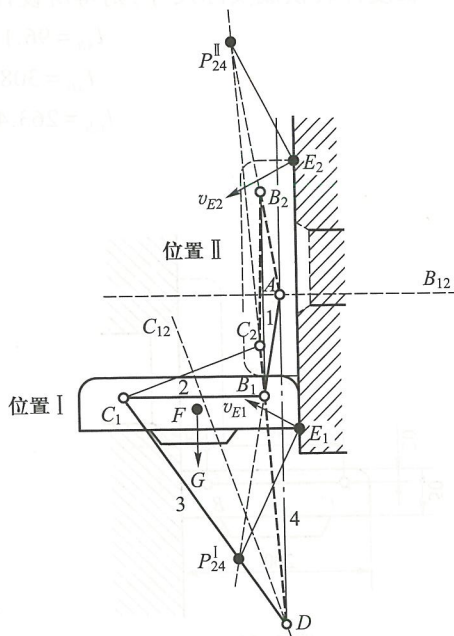


图 5-33

由此可见,仅仅满足实现连杆两个给定位置的要求,其设计并不困难,但是为使所设计的机构能较好地工作,就要考虑许多实际的附加条件。

习题 5-16 设计一铰链四杆机构,使其连杆上的某一点能近似地画出椭圆轨迹。设该椭圆的长半轴 $a = 50 \text{ mm}$, 短半轴 $b = 30 \text{ mm}$, 并在该椭圆上任取 20 个

离散点,试用数值比较法提供的程序计算结果。若改变各离散点的位置,或改变 a 、 b 的数值,试计算该类机构,并分析其结果。

【解题过程】

椭圆参数方程为 $\begin{cases} x = a \cos \theta = 50 \cos \theta \\ y = b \sin \theta = 30 \sin \theta \end{cases}$, 在其上取 20 个点(以 18° 为间隔取点),各点坐标如表 5-1 所示。

表 5-1 椭圆上取的离散点

点号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\theta/(^\circ)$	0	18	36	54	72	90	108	126	144	162
x/mm	50	47.55	40.45	29.39	15.45	0	-15.45	-29.39	-40.45	-47.55
y/mm	0	9.27	17.63	24.27	28.53	30	28.53	24.27	17.63	9.27
点号	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\theta/(^\circ)$	180	198	216	234	252	270	288	306	324	342
x/mm	-50	-47.55	-40.55	-29.39	-15.45	0	15.45	29.39	40.45	47.55
y/mm	0	-9.27	-17.63	-24.27	-28.53	-30	-28.53	-24.27	-17.63	-9.27

用数值比较法提供的程序进行计算,计算结果如图 5-34 所示。

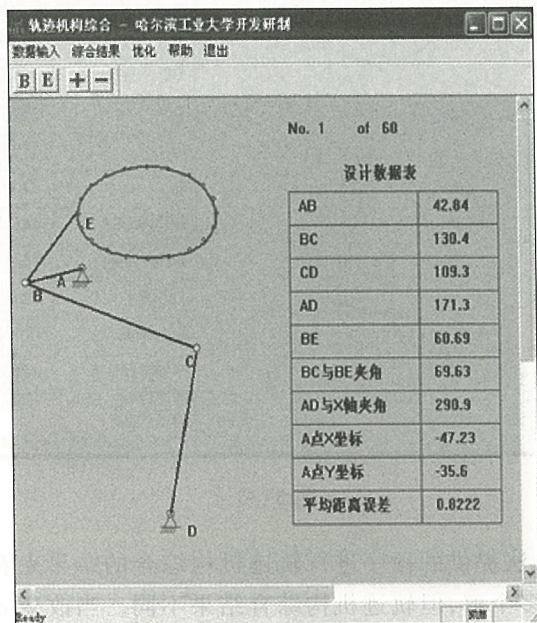


图 5-34

改变离散点的位置,各点坐标见表 5-2。

表 5-2 改变离散点位置椭圆上取的离散点

点号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\theta/(^{\circ})$	9	27	45	63	81	99	117	135	153	171
x/mm	49.38	44.55	35.36	22.7	7.82	-7.82	-22.7	-35.36	-44.55	-49.38
y/mm	4.69	13.62	21.21	26.73	29.63	29.63	26.72	21.21	13.62	4.69
点号	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\theta/(^{\circ})$	189	207	225	243	261	279	197	315	333	351
x/mm	-49.38	-44.55	-35.36	-22.7	-7.82	7.82	22.7	35.36	44.55	49.38
y/mm	-4.69	-13.62	-21.21	-26.73	-29.63	-29.63	-26.72	-22.21	-13.62	-4.69

用数值比较法提供的程序进行计算,计算结果如图 5-35 所示。

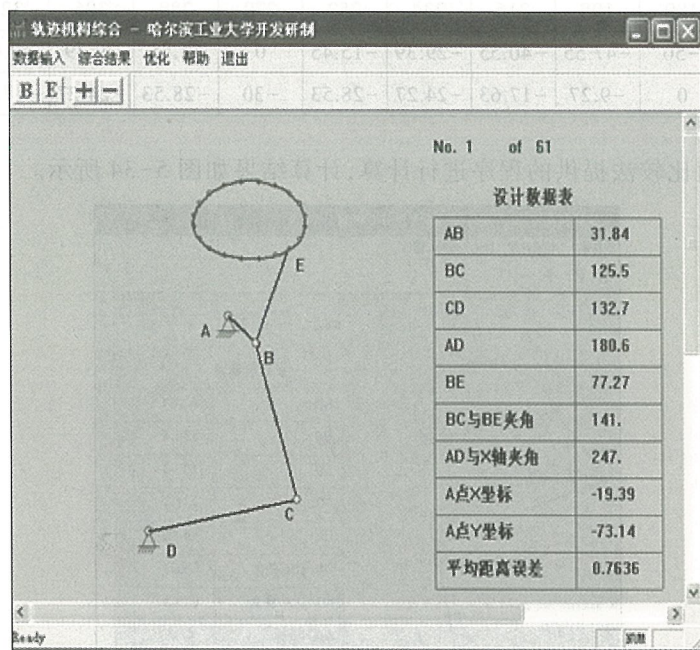


图 5-35

由用数值比较法提供的程序进行轨迹机构综合的结果来看,当改变离散点位置时,均可得到多个解,但轨迹机构综合结果不同。当改变 a 或 b 的值时,也可得到多个解(略)。

第六章 凸轮机构及其设计

6.1 基本要求

掌握凸轮机构的应用及分类,从动件运动规律,凸轮轮廓曲线设计,凸轮机构基本尺寸的确定。

6.2 重点及难点解析

6.2.1 本章重点

本章重点是凸轮从动件运动规律及其特性,平面凸轮轮廓曲线的设计方法和凸轮机构基本尺寸的确定。

1. 凸轮从动件运动规律及其特性

在选择凸轮从动件运动规律时,除要考虑刚性冲击与柔性冲击外,还应对各种运动规律的速度幅值 $v_{\max}$ 、加速度幅值 $a_{\max}$ 及其影响加以分析和比较。 $v_{\max}$ 越大,则从动件动量幅值 $mv_{\max}$ 越大;为安全与缓和冲击起见, $v_{\max}$ 越小越好。 $a_{\max}$ 越大,则从动件惯性力幅值 $(-ma_{\max})$ 越大;从减小凸轮副的动压力、振动和磨损等方面考虑, $a_{\max}$ 越小越好。所以,对于重载凸轮机构,考虑从动件质量 m 较大,应选择 $v_{\max}$ 较小的运动规律;对于高速凸轮机构,为减小从动件惯性力,宜选择 $a_{\max}$ 较小的运动规律,并尽量避免因加速度突变而引起的柔性冲击。

表 6-1 列出了几种常用从动件运动规律特性比较,并给出其适用范围,供选用时参考。

表 6-1 几种常用从动件运动规律特性比较

运动规律	$v_{\max}$ $(h\omega/\Phi_0) \times$	$a_{\max}$ $(h\omega^2/\Phi_0^2) \times$	冲击	应用场合
等速	1.00	∞	刚性	低速轻负荷
等加速等减速	2.00	4.00	柔性	中速轻负荷
余弦加速度	1.57	4.93	柔性	中低速中负荷

续表

运动规律	$v_{\max}$ $(h\omega/\Phi_0) \times$	$a_{\max}$ $(h\omega^2/\Phi_0^2) \times$	冲击	应用场合
正弦加速度	2.00	6.28	—	中高速轻负荷
3-4-5 多项式	1.88	5.77	—	高速中负荷
改进型等速	1.33	8.38	—	低速重负荷
改进型正弦加速度	1.76	5.53	—	中高速重负荷
改进型梯形加速度	2.00	4.89	—	高速轻负荷

2. 盘形凸轮轮廓曲线设计

凸轮轮廓曲线设计的方法为“反转法”，即在设计凸轮轮廓曲线时，可以让凸轮静止不动，而让从动件相对于凸轮轴心 O 作反转运动。若凸轮以 ω_1 沿顺时针方向转动，则令从动件以 $-\omega_1$ 沿逆时针方向绕凸轮轴心 O 转动，如图 6-1a、b、c 所示。同时再令从动件相对其导路按图 6-1d 中给定的运动规律运动，即凸

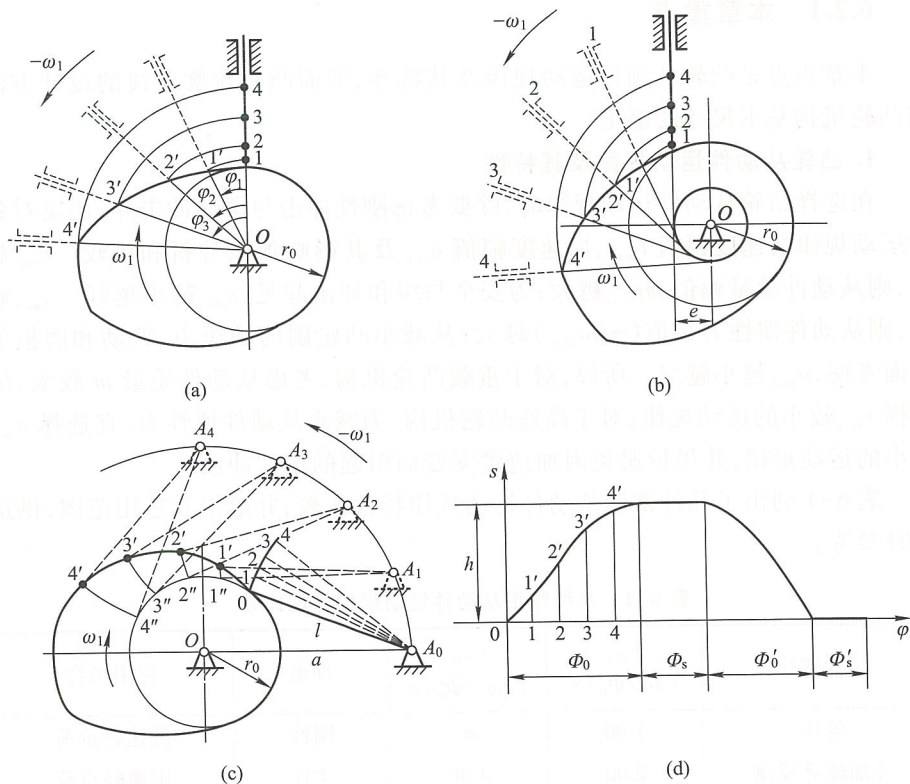


图 6-1

轮转过 φ_1 角时,相应地从动件反转 φ_1 角并移动到点 $1'$; 凸轮转过 φ_2 角时,相应地从动件反转 φ_2 角并移动到点 $2'$ ……从动件尖顶在反转运动中到达的点 $1'$ 、 $2'$ 、 $3'$ 、…即为所求的凸轮轮廓曲线上的点。这就是凸轮轮廓曲线设计的“反转法”。

3. 盘形凸轮机构基本尺寸的确定

凸轮机构的基本尺寸包括凸轮基圆半径 r_0 、直动从动件的偏距 e 或摆动从动件长度 l 、摆动从动件的摆动中心与凸轮轴心间的中心距 a 以及滚子半径 r_r 等。

凸轮机构的压力角与基圆半径和偏距之间满足如下关系:

$$\tan \alpha = \frac{|ds/d\varphi \pm e|}{\sqrt{r_0^2 - e^2} + s}$$

凸轮的基圆半径和偏距可根据许用压力角来确定,即可根据上式按图 6-2 来确定。

对于偏置凸轮机构,为改善其传力性能,减小推程压力角,从动件的偏置方向与凸轮工作时的回转方向有关,当凸轮顺时针转动时,从动件导路应偏于凸轮轴心的左侧;当凸轮逆时针转动时,从动件导路应偏置于凸轮轴心的右侧。

凸轮机构中,滚子半径 r_r 不宜过大。但因滚子装在销轴上,故亦不宜过小。一般推荐:

$$r_r < \rho_{\min} - (3 \sim 5) \text{ mm}$$

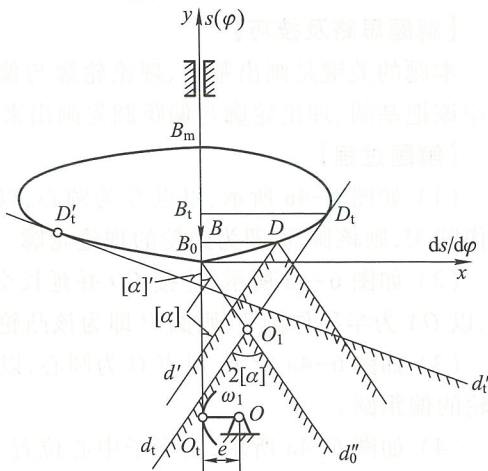


图 6-2

6.2.2 本章难点

本章难点是“反转法”,要正确确定从动件的反转方向、从动件在反转运动中占据的位置及从动件的位移量。

6.3 典型例题分析及解题技巧

例 6-1 图 6-3 所示直动滚子盘形凸轮机构,其凸轮实际廓线(轮廓曲线)为一以点 C 为圆心的圆, O 为其回转中心, e 为其偏距,滚子中心位于点 B_0 时为该凸

轮的起始位置。试画图(应该有必要的说明)求出:

- (1) 凸轮的理论轮廓曲线;
- (2) 凸轮的基圆;
- (3) 凸轮的偏距圆;
- (4) 初始位置(当滚子中心在初始位置点 B_0)时是推程段还是回程段?
- (5) 当滚子与凸轮实际廓线在点 B_1 接触时,所对应的凸轮转角 φ_1 ;
- (6) 当滚子中心位于点 B_2 时,所对应的凸轮机构的压力角 α_2 及从动件推杆的位移 s_2 (以滚子中心位于点 B_0 时为位移起始参考点);
- (7) 凸轮的最大压力角 $\alpha_{\max}$ 。

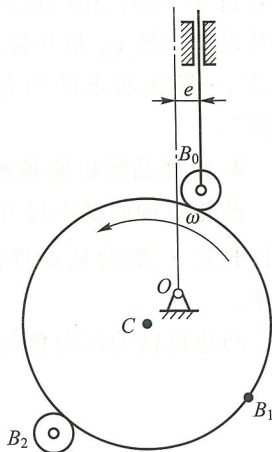


图 6-3

【解题思路及技巧】

本题的关键是画出基圆、理论轮廓与偏距圆,即使没有本题的前 3 个问题,也应该把基圆、理论轮廓与偏距圆先画出来。

【解题过程】

(1) 如图 6-4a 所示,以点 C 为圆心,以点 C 到滚子铰链中心 B_0 的距离为半径作圆 M ,则该圆 M 即为凸轮的理论轮廓。

(2) 如图 6-4a 所示,连接 CO 并延长交理论轮廓圆 M 于点 A ,以点 O 为圆心,以 OA 为半径作圆 P ,则圆 P 即为该凸轮的基圆。

(3) 如图 6-4a 所示,以点 O 为圆心,以偏距 e 为半径作圆 N ,则圆 N 即为该凸轮的偏距圆。

(4) 如图 6-4a 所示,当滚子中心位于点 A 时,推杆的位移为 0。当凸轮逆时针旋转使滚子中心由 B_0 运动到 A 时,推杆的位移是减少的,所以初始位置时是回程段。

(5) 如图 6-4b 所示,延长推杆使其与偏距圆 N 相切,切点为 E ,连接 OE 。连接 CB_1 并延长交理论轮廓于点 D ,过点 D 作偏距圆 N 的切线,切点为 F ,连接 OF ,则线段 OE 与 OF 之间的夹角 φ_1 即为当滚子与凸轮实际廓线在点 B_1 接触时,所对应的凸轮转角。

(6) 如图 6-4b 所示,过点 B_2 作圆 N 的切线,切点为 G 。连接点 B_2 与 C ,则直线 B_2G 与 B_2C 间的夹角即为所求的该位置时凸轮机构的压力角 α_2 。以点 O 为圆心,以 OB_0 长度为半径作圆 Q 。 B_2G 与圆 Q 的交点为 H 。线段 B_2H 为以滚子中心位于 B_0 点时为位移起始参考点时从动件的位移 s_2 。

(7) 为找出机构的最大压力角 $\alpha_{\max}$ 的位置,先从滚子中心处于一般位置点

B_2 处研究。如图 6-4b 所示,过点 C 作 B_2G 的垂线 CX ,垂足为 X ,则

$$\sin \alpha_2 = \frac{CX}{CB_2}$$

由于 CB_2 是理论轮廓圆的半径,是定值,所以由上式可知, CX 越大,则压力角越大。 CX 是点 C 到偏距线的距离,所以只要找到点 C 到偏距线的最大距离,即找到了压力角的最大值。连接 CO ,并延长交偏距圆 N 于点 J ,过 J 作圆 N 的切线 JK 交理论轮廓圆 M 于点 K 。连接 KC ,则直线 KC 与 KJ 间的夹角为该机构的最大压力角 $\alpha_{\max}$ 。

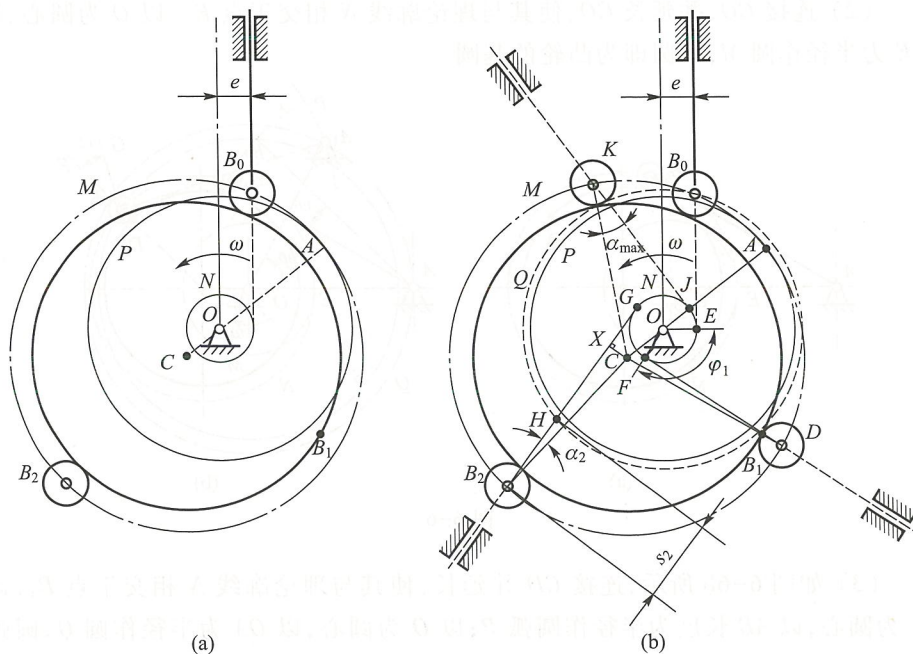


图 6-4

例 6-2 图 6-5 所示为摆动从动件滚子盘形凸轮机构,凸轮实际廓线为一以点 C 为圆心的圆, O 为其回转中心,凸轮以角速度 ω 沿逆时针方向回转。试在图上标出:

- (1) 凸轮的理论廓线;
- (2) 凸轮的基圆;

(3) 凸轮由图示位置转到从动件滚子与凸轮轮廓在点 D 接触时,

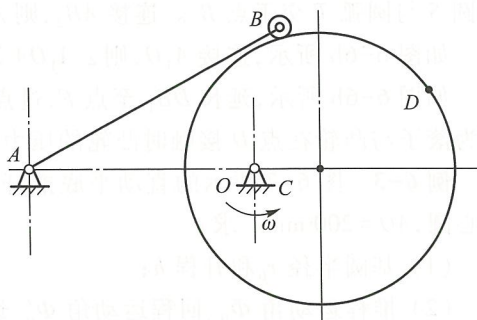


图 6-5

从动件的位移 ψ 、凸轮的转角 φ 和凸轮的压力角 α 。

【解题思路及技巧】

- (1) 本题一定要画对理论轮廓。
- (2) 要清楚从动件的受力方向和运动方向。

【解题过程】

(1) 如图 6-6a 所示,以点 C 为圆心,以 BC 为半径作圆 N ,圆 N 即为该凸轮的理论廓线。

(2) 连接 CO ,并延长 CO ,使其与理论廓线 N 相交于点 E 。以 O 为圆心,以 OE 为半径作圆 M ,该圆即为凸轮的基圆。

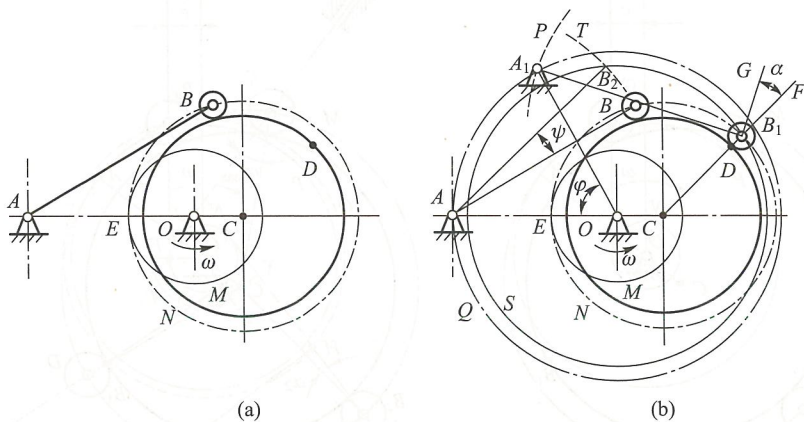


图 6-6

(3) 如图 6-6b 所示,连接 CD 并延长,使其与理论廓线 N 相交于点 B_1 ,以 B_1 为圆心,以 AB 长度为半径作圆弧 P ;以 O 为圆心,以 OA 为半径作圆 Q ,圆弧 P 与圆 Q 交于点 A_1 。则 A_1B_1 即为滚子在点 D 与凸轮接触时从动件摆杆所对应的位置。以 O 为圆心,以 OB_1 为半径作圆 S ;以 A 为圆心,以 AB 为半径作圆弧 T ,圆 S 与圆弧 T 交于点 B_2 。连接 AB_2 ,则 $\angle B_2AB$ 即为从动件位移 ψ 角。

如图 6-6b 所示,连接 A_1O ,则 $\angle A_1OA$ 即为凸轮的转角 φ 。

如图 6-6b 所示,延长 DB_1 至点 F ,过点 B_1 作 A_1B_1 的垂线 B_1G ,则 $\angle FB_1G$ 即为滚子与凸轮在点 D 接触时凸轮的压力角 α 。

例 6-3 图 6-7 所示的直动平底推杆盘形凸轮机构,凸轮为 $r=300\text{ mm}$ 的偏心圆, $AO=200\text{ mm}$ 。求:

- (1) 基圆半径 r_0 和升程 h ;
- (2) 推程运动角 Φ_0 、回程运动角 Φ'_0 、远休止角 Φ_s 和近休止角 Φ'_s ;
- (3) 凸轮机构的最大压力角 $\alpha_{\max}$ 和最小压力角 $\alpha_{\min}$;

(4) 推杆的位移 s 、速度 v 和加速度 a 的方程式;

(5) 若凸轮以 $\omega_1 = 10 \text{ rad/s}$ 匀速转动, 当 AO 在水平位置时推杆的速度。

【解题过程】

(1) 如图 6-8 所示, 连接 OA , 并延长与凸轮轮廓交于点 C , AC 长度即为凸轮的基圆半径, 其值为

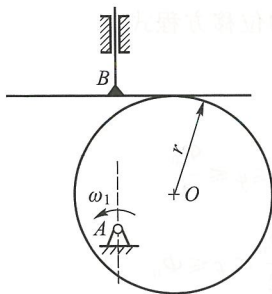


图 6-7

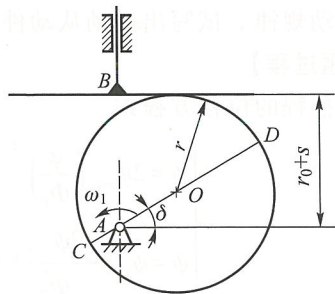


图 6-8

$$r_0 = OC - OA = 300 \text{ mm} - 200 \text{ mm} = 100 \text{ mm}$$

(2) 连接 AO , 并延长与凸轮轮廓交于点 D 。当凸轮处在点 C 位于点 A 正上方时, 推杆处于最低位置, 当凸轮运动至点 D 位于点 A 正上方时, 推杆处于最高位置, 所以

$$\Phi_0 = \Phi'_0 = 180^\circ, \quad \Phi_s = \Phi'_s = 0^\circ$$

(3) 由于推杆运动方向与凸轮受力方向的夹角始终为 0 , 所以

$$\alpha_{\max} = \alpha_{\min} = 0^\circ$$

(4) 设 AO 连线与水平线的夹角为凸轮的转角 δ , 则平底到凸轮转动中心 A 的距离为

$$r_0 + s = OD + OA \sin \delta$$

所以推杆的位移为

$$s = OD + AO \sin \delta - r_0 = OD + AO \sin \delta - AC = AO + AO \sin \delta = 200(1 + \sin \delta)$$

因而推杆的速度为

$$v = \dot{s} = 200\omega_1 \cos \delta$$

推杆的加速度为

$$a = \dot{v} = -200\omega_1^2 \sin \delta$$

(5) 当 AO 成水平位置时, $\delta = 0^\circ$ 或 $\delta = 180^\circ$, 此时

$$v = \dot{s} = 200\omega_1 \cos \delta = 200 \times 10 \times \cos 0^\circ \text{ mm/s} = 2000 \text{ mm/s}$$

或

$$v = \dot{s} = 200\omega_1 \cos \delta = 200 \times 10 \times \cos 180^\circ \text{ mm/s} = -2000 \text{ mm/s}$$

6.4 习题解答

习题 6-1 在摆动从动件盘形凸轮机构中,从动件行程角(位移) $\psi_{\max} = 30^\circ$,
 $\Phi_0 = 120^\circ$, $\Phi_s = 120^\circ$, $\Phi'_0 = 120^\circ$,从动件推程、回程分别采用等加速等减速和正弦
 加速度运动规律。试写出摆动从动件在各行程的位移方程式。

【解题过程】

(1) 推程的位移方程式

$$\begin{cases} \psi = 2\psi_{\max} \left(\frac{\varphi}{\Phi_0} \right)^2 & 0 \leq \varphi \leq \frac{\Phi_0}{2} \\ \psi = \psi_{\max} - \frac{2\psi_{\max}}{\Phi_0^2} (\Phi_0 - \varphi)^2 & \frac{\Phi_0}{2} \leq \varphi \leq \Phi_0 \end{cases}$$

代入数值,即

$$\begin{cases} \psi = 2 \times 30^\circ \times \left(\frac{\varphi}{120^\circ} \right)^2 = \frac{\varphi^2}{240^\circ} & 0 \leq \varphi \leq 60^\circ \\ \psi = 30^\circ - \frac{2 \times 30^\circ}{(120^\circ)^2} \times (120^\circ - \varphi)^2 = 30^\circ - \frac{1}{240^\circ} \times (120^\circ - \varphi)^2 & 60^\circ < \varphi \leq 120^\circ \end{cases}$$

(2) 回程的位移方程式

$$\begin{cases} \psi = \psi_{\max} \left[1 - \frac{T}{\Phi'_0} + \frac{1}{2\pi} \sin \left(\frac{2\pi}{\Phi'_0} T \right) \right] & \Phi_0 + \Phi_s \leq \varphi \leq 360^\circ \\ T = \varphi - (\Phi_0 + \Phi_s) \end{cases}$$

代入数值,即

$$\begin{aligned} \psi &= 30^\circ \times \left[1 - \frac{\varphi - 240^\circ}{120^\circ} + \frac{1}{2\pi} \sin \left(\frac{360^\circ}{120^\circ} \varphi - \frac{360^\circ}{120^\circ} \times 240^\circ \right) \right] \\ &= 30^\circ - \frac{\varphi - 240^\circ}{4} + \frac{30^\circ}{2\pi} \sin 3(\varphi - 240^\circ) \quad 240^\circ \leq \varphi \leq 360^\circ \end{aligned}$$

习题 6-2 图 6-9 所示为从动件在推程的部分运动曲线,其 $\Phi_s \neq 0^\circ$, $\Phi'_s \neq 0^\circ$ 。试根据 s 、 v 和 a 之间的关系定性补全该运动曲线;并指出该凸轮机构工作时,何处有刚性冲击? 何处有柔性冲击?

【解题思路及技巧】

(1) 深入理解位移、速度及加速度间的关系。

(2) 理解刚性冲击与柔性冲击。在凸轮机构运动的始、末点处速度产生突变,理论上加速度为无穷大,产生无穷大的惯性力,机构将产生极大的冲击,此种

冲击称为刚性冲击;在凸轮机构运动的始、末点处产生突变的加速度和惯性力,由此而引起的冲击称为柔性冲击。

【解题过程】

(1) 如图 6-10 所示, AB 段的位移线为一条倾斜的直线, 因此在这一段应为等速运动规律, 其速度线图为一水平直线, 其加速度为零;

(2) BC 段的加速度线图为一水平直线, 因此在这一段为等加速运动规律, 其速度线图为一倾斜的直线, 其位移线图为一上凸的二次曲线;

(3) CD 段的速度线图为一倾斜下降的斜直线, 因此在这一段为等减速运动规律, 其加速度线图为一水平直线, 其位移线图为一上凸的二次曲线。

(4) 该凸轮在工作时, 在 A 处有刚性冲击, B 、 C 、 D 处有柔性冲击。

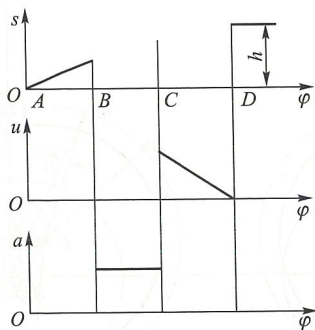


图 6-9

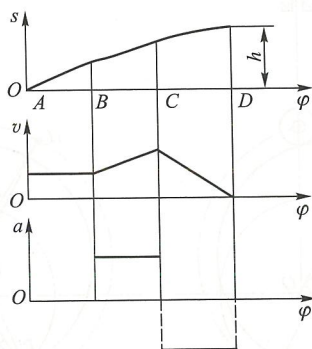


图 6-10

习题 6-3 在图 6-11 所示偏置滚子直动从动件盘形凸轮机构中, 凸轮 1 的工作轮廓为圆, 其圆心和半径分别为 C 和 R , 凸轮 1 沿逆时针方向转动, 推动从动件往复移动。已知: $R = 100 \text{ mm}$, $OC = 20 \text{ mm}$, 偏距 $e = 10 \text{ mm}$, 滚子半径 $r_r = 10 \text{ mm}$, 试求:

- (1) 凸轮的理论轮廓。
- (2) 凸轮基圆半径 r_0 、从动件行程 h 各为多少?
- (3) 推程运动角 Φ_0 、回程运动角 Φ'_0 、远休止角 Φ_s 、近休止角 Φ'_s 各为多少?

* (4) 从动件推程、回程位移方程式。

* (5) 凸轮机构的最大压力角 $\alpha_{\max}$ 、最小压力角 $\alpha_{\min}$ 各为多少? 又分别在凸轮轮廓上哪点出现?

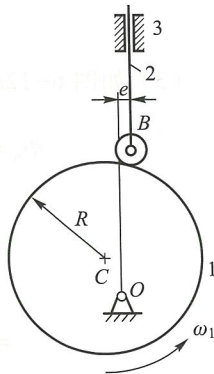


图 6-11

【解题过程】

(1) 如图 6-12a 所示, 凸轮的理论轮廓是以 C 为圆心, 以 $R + r_r = 110 \text{ mm}$ 为半径的圆。

(2) 如图 6-12a 所示,过理论轮廓的圆心 C 和凸轮的回转中心 O 作直线交于理论轮廓于点 L 和点 H 。以 O 为圆心, OL 为半径作凸轮的基圆,其半径值为

$$r_0 = OL = R + r_r - \overline{OC} = 100 \text{ mm} + 10 \text{ mm} - 20 \text{ mm} = 90 \text{ mm}$$

以点 O 为圆心,以偏距 $e = 10 \text{ mm}$ 为半径作凸轮的偏距圆,如图 6-12a 所示。过点 H 作偏距圆的切线交基圆于点 M ,从动件行程为

$$\begin{aligned} h &= \overline{HM} = \sqrt{\overline{OH}^2 - e^2} - \sqrt{r_0^2 - e^2} = \sqrt{(R + r_r + \overline{OC})^2 - e^2} - \sqrt{r_0^2 - e^2} \\ &= (\sqrt{(100 + 10 + 20)^2 - 10^2} - \sqrt{90^2 - 10^2}) \text{ mm} = 40.172 \text{ mm} \end{aligned}$$

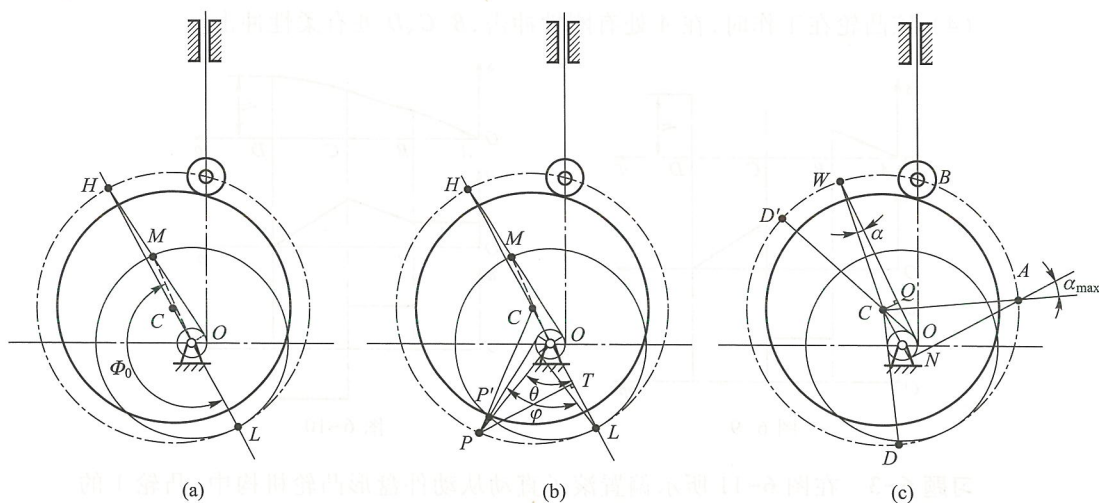


图 6-12

(3) 如图 6-12a 所示,推程运动角为 $\angle MOL$,即

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= 180^\circ + \arcsin \frac{e}{OM} - \arcsin \frac{e}{OH} \\ &= 180^\circ + \arcsin \frac{e}{R + r_r - \overline{OC}} - \arcsin \frac{e}{R + r_r + \overline{OC}} \\ &= 180^\circ + \arcsin \frac{10}{100 + 10 - 20} - \arcsin \frac{10}{100 + 10 + 20} \\ &= 180^\circ + 6.379\ 37^\circ - 4.411\ 73^\circ = 181.967\ 64^\circ \end{aligned}$$

回程运动角

$$\Phi'_0 = 360^\circ - \Phi_0 = 360^\circ - 181.967\ 64^\circ = 178.032\ 36^\circ$$

远休止角和近休止角

$$\Phi_s = \Phi'_s = 0^\circ$$

(4) 如图 6-12b 所示,以点 O 为极点,以 OL 为极轴,设理论轮廓上任意点 P 的向径为 r , $\theta = \angle POL$ 。连接点 O 与点 P 、点 P 与点 C ,过点 P 作 OL 的垂线,垂足为 T 。根据 $RT\triangle PTC$ 和 $RT\triangle PTO$,可写出理论轮廓的极坐标方程为

$$\begin{aligned}(R+r_r)^2 &= (r\cos\theta + \overline{OC})^2 + (r\sin\theta)^2 \\ &= (r\cos\theta)^2 + 2\overline{OC}r\cos\theta + \overline{OC}^2 + (r\sin\theta)^2 \\ &= r^2 + 2\overline{OC}r\cos\theta + \overline{OC}^2\end{aligned}$$

整理,得

$$r^2 + 2\overline{OC}r\cos\theta + \overline{OC}^2 - (R+r_r)^2 = 0$$

解一元二次方程

$$\begin{aligned}r &= \frac{-2\overline{OC}\cos\theta \pm \sqrt{4\overline{OC}^2\cos^2\theta - 4[\overline{OC}^2 - (R+r_r)^2]}}{2} \\ &= \pm \sqrt{(R+r_r)^2 - \overline{OC}^2\sin^2\theta} - \overline{OC}\cos\theta\end{aligned}$$

r 不能为负值,则理论轮廓的极坐标方程为

$$r = \sqrt{(R+r_r)^2 - \overline{OC}^2\sin^2\theta} - \overline{OC}\cos\theta$$

当推杆与凸轮的理论轮廓在点 L 处接触时,推杆处在最低位置;当凸轮转过角度 φ 时,推杆与凸轮的理论轮廓在点 P 接触,过点 P 作偏距圆的切线交基圆于点 P' ,此时推杆的位移为

$$\begin{aligned}s &= \overline{P'P} = \sqrt{\overline{OP}^2 - e^2} - \sqrt{\overline{OP'}^2 - e^2} \\ \overline{OP} &= r = \sqrt{(R+r_r)^2 - \overline{OC}^2\sin^2\theta} - \overline{OC}\cos\theta \\ \overline{OP'} &= r_0\end{aligned}$$

凸轮的转角为

$$\begin{aligned}\varphi &= \theta + \arcsin \frac{e}{OL} - \arcsin \frac{e}{OP} \\ &= \theta + \arcsin \frac{e}{R+r_r - \overline{OC}} - \arcsin \frac{e}{\sqrt{(R+r_r)^2 - \overline{OC}^2\sin^2\theta} - \overline{OC}\cos\theta}\end{aligned}$$

从动件位移方程式为

$$\begin{cases} s = \sqrt{\left[\sqrt{(R+r_r)^2 - \overline{OC}^2} \sin^2 \theta - \overline{OC} \cos \theta \right]^2 - e^2} - \sqrt{r_0^2 - e^2} \\ \varphi = \theta + \arcsin \frac{e}{R+r_r - \overline{OC}} - \arcsin \frac{e}{\sqrt{(R+r_r)^2 - \overline{OC}^2} \sin^2 \theta - \overline{OC} \cos \theta} \end{cases}$$

(5) 如图 6-12c 所示,理论轮廓上任意点 W 的压力角为

$$\alpha = \arcsin \left(\frac{\overline{CQ}}{\overline{CW}} \right) = \arcsin \left(\frac{\overline{CQ}}{R+r_r} \right)$$

式中, $\overline{CQ}$ 为理论轮廓的圆心到推杆导路的距离。

由此可以看出,圆心 C 到推杆导路的距离 $\overline{CQ}$ 越大则压力角越大, $\overline{CQ}$ 越小则压力角越小。只要求得 $\overline{CQ}$ 最大的位置便可求出最大压力角,求得 $\overline{CQ}$ 最小的位置便可求出最小压力角。

连接点 C 和 O 并延长交偏距圆于点 N ,过点 N 作偏距圆的切线交理论轮廓于点 A ,该切线就是推杆与轮廓在点 A 接触时的导路,此时圆心 C 到导路的距离 $\overline{CN}$ 为最大,因此在轮廓的点 A 处有最大压力角

$$\begin{aligned} \alpha_{\max} &= \arcsin \frac{\overline{OC} + e}{R + r_r} \\ &= \arcsin \frac{20 + 10}{100 + 10} = \arcsin 0.2727 = 15.8266^\circ \end{aligned}$$

过点 C 作偏距圆的切线(有两条)交理论轮廓于点 D 和点 D' ,该切线就是推杆与轮廓在点 D 和点 D' 接触时的导路,此时,圆心 C 到导路的距离为零,因此,在轮廓的点 D 和点 D' 处有最小压力角 $\alpha_{\min} = 0^\circ$ 。

习题 6-4 在图 6-13 所示滚子摆动从动件盘形凸轮机构中,凸轮 1 的工作轮廓为圆,其圆心和半径分别为 C 和 R ,凸轮 1 沿顺时针方向转动,推动从动件往复摆动。已知: $R = 100 \text{ mm}$, $OC = 30 \text{ mm}$,摆杆长度 $l = 90 \text{ mm}$,中心距 $a = 125 \text{ mm}$,滚子半径 $r_r = 10 \text{ mm}$ 。试:

- (1) 绘出凸轮的理论轮廓。
- (2) 求该机构为顺摆式还是逆摆式。
- (3) 求推程运动角 Φ_0 、回程运动角 Φ'_0 、远休止角 Φ_s 、近休止角 Φ'_s 。
- (4) 求凸轮基圆半径 r_0 、从动件行程角 $\psi_{\max}$ 。
- * (5) 求凸轮机构的最大压力角 $\alpha_{\max}$ 、最小压力角 $\alpha_{\min}$,分别在工作轮廓上哪

点出现。

【解题过程】

(1) 如图 6-14 所示, 凸轮的理论轮廓是以 C 为圆心, 以 $R+r_r=110\text{ mm}$ 为半径的圆。

(2) 该凸轮机构是逆摆式。

(3) 在图 6-14 中, 以回转中心 O 为圆心, 以 $a=125\text{ mm}$ 为半径作中心圆; 过回转中心 O 和理论轮廓的圆心 C 作直线, 相交于理论轮廓上点 B_H 和 B_L ; B_H 和 B_L 分别是滚子中心 B 与理论轮廓接触的最高点和最低点。分别以点 B_H 和 B_L 为圆心, 以摆杆长度 $l=90\text{ mm}$ 为半径作圆弧, 交中心圆于 A_H 和 A_L , 则推程运动角为

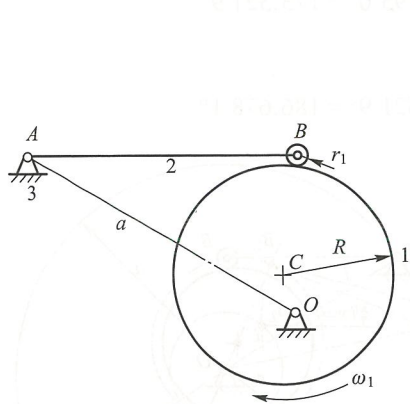


图 6-13

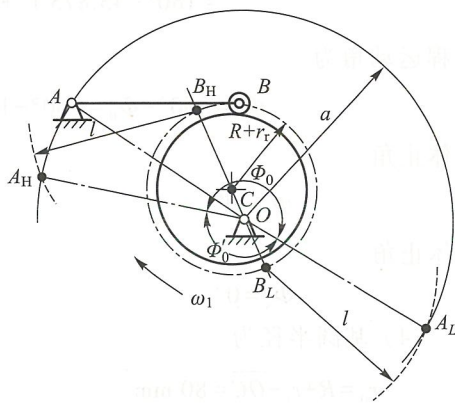


图 6-14

$$\Phi_0 = 180^\circ - \angle B_L O A_L + \angle B_H O A_H$$

$$\cos \angle B_L O A_L = \frac{\overline{OB_L}^2 + \overline{OA_L}^2 - l^2}{2 \overline{OB_L} \overline{OA_L}}$$

$$= \frac{(R+r_r - \overline{OC})^2 + a^2 - l^2}{2(R+r_r - \overline{OC})a}$$

$$= \frac{(100+10-30)^2 + 125^2 - 90^2}{2 \times (100+10-30) \times 125} = 0.696\ 25$$

$$\angle B_L O A_L = 45.873\ 1^\circ$$

$$\begin{aligned}\cos \angle B_H O A_H &= \frac{\overline{OB_H}^2 + \overline{OA_H}^2 - l^2}{2 \overline{OB_H} \overline{OA_H}} \\&= \frac{(R+r_r+\overline{OC})^2 + a^2 - l^2}{2(R+r_r+\overline{OC})a} \\&= \frac{(100+10+30)^2 + 125^2 - 90^2}{2 \times (100+10+30) \times 125} = 0.775\end{aligned}$$

$$\angle B_H O A_H = 39.195^\circ$$

$$\Phi_0 = 180^\circ - \angle B_L O A_L + \angle B_H O A_H$$

$$= 180^\circ - 45.873^\circ + 39.195^\circ = 173.321^\circ$$

回程运动角为

$$\Phi'_0 = 360^\circ - \Phi_0 = 360^\circ - 173.321^\circ = 186.678^\circ$$

远休止角

$$\Phi_s = 0^\circ$$

近休止角

$$\Phi'_s = 0^\circ$$

(4) 基圆半径为

$$r_0 = R + r_r - \overline{OC} = 80 \text{ mm}$$

以 r_0 为半径, 以点 O 为圆心作圆, 该圆为基圆, 如图 6-15 所示。

在图 6-15 中, 以点 A_H 为圆心, 以摆杆长度 $l=90 \text{ mm}$ 为半径作圆弧, 交基圆于点 B'_L , 则从动件行程角为

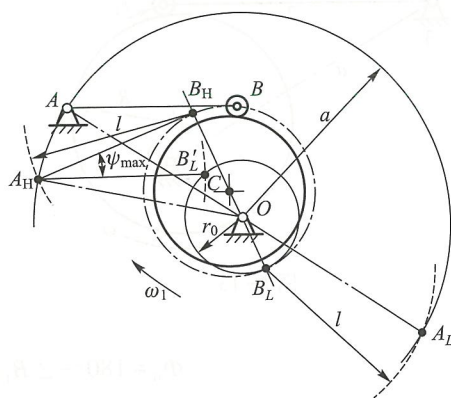


图 6-15

$$\psi_{\max} = \angle B_H A_H B'_L = \angle B_H A_H O - \angle B'_L A_H O$$

$$\begin{aligned}\cos \angle B_H A_H O &= \frac{\overline{A_H B_H}^2 + \overline{A_H O}^2 - \overline{OB_H}^2}{2 \overline{A_H B_H} \overline{A_H O}} \\&= \frac{l^2 + a^2 - (R+r_r+\overline{OC})^2}{2la} \\&= \frac{90^2 + 125^2 - (100+10+30)^2}{2 \times 90 \times 125} = 0.183\end{aligned}$$

$$\angle B_H A_H O = 79.436 0^\circ$$

$$\begin{aligned}\cos \angle B'_L A_H O &= \frac{\overline{A_H B'_L}^2 + \overline{A_H O}^2 - \overline{O B'_L}^2}{2 \overline{A_H B'_L} \overline{A_H O}} \\&= \frac{l^2 + a^2 - (R + r_r - \overline{OC})^2}{2la} \\&= \frac{90^2 + 125^2 - (100 + 10 - 30)^2}{2 \times 90 \times 125} = 0.770 0\end{aligned}$$

$$\angle B'_L A_H O = 39.646 1^\circ$$

从动件行程角为

$$\psi_{\max} = \angle B_H A_H B'_L = \angle B_H A_H O - \angle B'_L A_H O = 79.436 0^\circ - 39.646 1^\circ = 39.789 9^\circ$$

(5) 如图 6-16 所示, 摆杆与凸轮理论廓线在点 B 接触, 过点 B 作摆杆 AB 的垂线 BT , 则凸轮在点 B 的压力角为

$$\alpha = \angle CBT = \angle ABT - \angle ABC$$

$$\angle ABT = 90^\circ$$

于是有

$$\alpha = \angle CBT = 90^\circ - \angle ABC$$

当 $\angle ABC > 90^\circ$ 时, 有

$$\alpha = \angle CBT = \angle ABC - 90^\circ$$

在图 6-16 $\triangle ABC$ 中, 根据余弦定理有

$$\cos \angle ABC = \frac{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2}{2 \overline{AB} \overline{BC}}$$

由该式可以看出, 当 $\sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2} - \overline{AC} = 0$ 时

$$\angle ABC = 90^\circ$$

这也就是说, 此时凸轮的压力角为零, 即

$$\alpha = \angle CBT = 90^\circ - \angle ABC = 0^\circ$$

以 $\overline{AC} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2} = \sqrt{l^2 + (R + r_r)^2} = \sqrt{90^2 + (100 + 10)^2} \text{ mm} = 142.127 \text{ mm}$ 为半径, 以点 C 为圆心作圆弧交中心圆于 A_1 、 A'_1 , 分别以点 A_1 、 A'_1 为圆心, 以摆杆长度 $l = 90 \text{ mm}$ 为半径作圆弧, 分别交凸轮理论轮廓于 B_1 、 B'_1 , 在凸轮理论轮廓上点 B_1 、

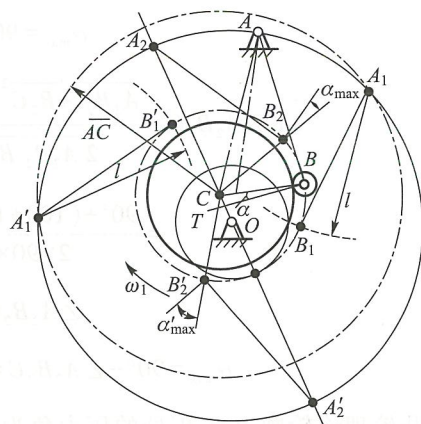


图 6-16

B'_1 处,其压力角为零,即

$$\alpha_{\min} = 0^\circ$$

当 $\sqrt{AB^2 + BC^2} - \overline{AC} \neq 0$ 时, $\sqrt{AB^2 + BC^2} - \overline{AC}$ 的绝对值越大,则 $90^\circ - \angle ABC$ 的绝对值也越大,这也就是说,凸轮的压力角也越大。由于在凸轮工作期间,其摆杆的长度和理论轮廓的半径是不会变化的,也就是说 $\sqrt{AB^2 + BC^2}$ 的值是一个常数,因此只有在 $\overline{AC}$ 的长度达到极值时, $\sqrt{AB^2 + BC^2} - \overline{AC}$ 的绝对值才能达到极值,从而凸轮的压力角才能达到极值。

在图 6-16 中,连接点 C 和点 O 作直线,交中心圆于点 A_2 、 A'_2 ,当凸轮摆杆以这两点为摆动中心时,其到点 C 的距离 $\overline{A_2C}$ 、 $\overline{A'_2C}$ 分别是最大值和最小值。分别以点 A_2 、 A'_2 为圆心,以摆杆长度 $l = 90 \text{ mm}$ 为半径作圆弧,分别交凸轮理论轮廓于点 B_2 、 B'_2 ,在凸轮理论轮廓上点 B_2 处的压力角为

$$\begin{aligned}\alpha_{\max} &= 90^\circ - \angle A_2 B_2 C \\ \cos \angle A_2 B_2 C &= \frac{\overline{A_2 B_2}^2 + \overline{B_2 C}^2 - \overline{A_2 C}^2}{2 \overline{A_2 B_2} \overline{B_2 C}} = \frac{l^2 + (R + r_r)^2 - (a - \overline{OC})^2}{2l(R + r_r)} \\ &= \frac{90^2 + (100 + 10)^2 - (125 - 30)^2}{2 \times 90 \times (100 + 10)} = 0.564 \ 39 \\ \angle A_2 B_2 C &= 55.640^\circ \\ \alpha_{\max} &= 90^\circ - \angle A_2 B_2 C = 90^\circ - 55.640^\circ = 34.360^\circ\end{aligned}$$

在凸轮理论轮廓上点 B'_2 处的压力角为

$$\begin{aligned}\alpha'_{\max} &= \angle A'_2 B'_2 C - 90^\circ \\ \cos \angle A'_2 B'_2 C &= \frac{\overline{A'_2 B'_2}^2 + \overline{B'_2 C}^2 - \overline{A'_2 C}^2}{2 \overline{A'_2 B'_2} \overline{B'_2 C}} = \frac{l^2 + (R + r_r)^2 - (a + \overline{OC})^2}{2l(R + r_r)} \\ &= \frac{90^2 + (100 + 10)^2 - (125 + 30)^2}{2 \times 90 \times (100 + 10)} = -0.193 \ 18 \\ \angle A'_2 B'_2 C &= 101.139^\circ \\ \alpha'_{\max} &= \angle A'_2 B'_2 C - 90^\circ = 101.139^\circ - 90^\circ = 11.139^\circ\end{aligned}$$

比较凸轮理论轮廓上点 B_2 、 B'_2 处的压力角可知,点 B_2 处的压力角为最大,该点的压力角也是升程最大压力角;点 B'_2 处的压力角为回程最大压力角。

习题 6-5 设计图 6-17 所示的摆动尖顶从动件盘形凸轮。已知凸轮 1 沿顺时针方向等速转动,中心距 $a = 75 \text{ mm}$,凸轮基圆半径 $r_0 = 30 \text{ mm}$,从动件长度 $l = 58 \text{ mm}$,从动件行程角 $\psi_{\max} = 15^\circ$, $\Phi_0 = 150^\circ$, $\Phi_s = 0^\circ$, $\Phi'_0 = 120^\circ$;从动件在推程、回程皆采用简谐运动规律。试通过计算机辅助设计求凸轮理论轮廓和工作轮廓上各点的坐标值(每隔 10° 计算一点),并绘出凸轮轮廓。

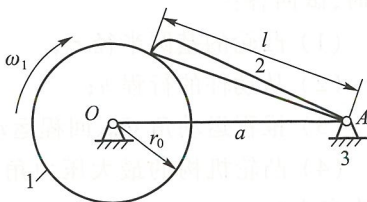


图 6-17

【解题过程】

略。

习题 6-6 设计图 6-18 所示的偏置直动滚子从动件盘形凸轮。已知凸轮 1 沿顺时针方向等速转动,凸轮基圆半径 $r_0 = 40 \text{ mm}$,偏距 $e = 10 \text{ mm}$,从动件行程 $h = 30 \text{ mm}$,滚子半径 $r_r = 10 \text{ mm}$, $\Phi_0 = 150^\circ$, $\Phi_s = 30^\circ$, $\Phi'_0 = 120^\circ$, $\Phi'_s = 60^\circ$;从动件在推程、回程皆采用简谐运动规律。试通过计算机辅助设计求凸轮理论轮廓和工作轮廓上各点的坐标值(每隔 10° 计算一点),并绘出凸轮的理论轮廓与工作轮廓。

【解题过程】

略。

习题 6-7 设计图 6-19 所示的直动平底从动件盘形凸轮。已知凸轮 1 沿顺时针方向等速转动,凸轮基圆半径 $r_0 = 40 \text{ mm}$,从动件平底与导路夹角 $\beta = 90^\circ$,从动件行程 $h = 20 \text{ mm}$, $\Phi_0 = 120^\circ$, $\Phi_s = 30^\circ$, $\Phi'_0 = 90^\circ$;从动件推程、回程皆采用简谐运动规律。试校核是否满足凸轮轮廓全部外凸条件,并绘出凸轮轮廓。

【解题过程】

略。

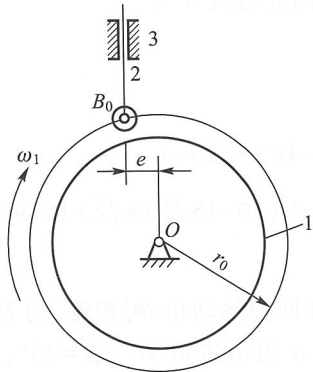


图 6-18

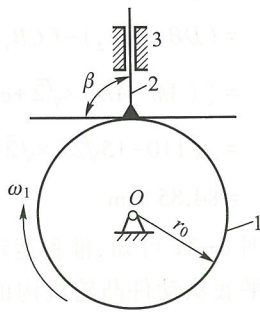


图 6-19

习题 6-8 图 6-20 所示凸轮机构中,凸轮为一偏心圆盘。已知:圆盘半径 $R=80\text{ mm}$,圆盘几何中心 O 到回转中心 A 的距离 $OA=30\text{ mm}$,偏距 $e=15\text{ mm}$,平底与导路间的夹角 $\beta=45^\circ$ 。当凸轮以等角速度 ω 逆时针回转时,试回答:

- (1) 凸轮的基圆半径 r_0 ;
- (2) 从动件的行程 h ;
- (3) 推程运动角 Φ_0 、回程运动角 Φ'_0 ;
- (4) 凸轮机构的最大压力角 $\alpha_{\max}$ 、最小压力角 $\alpha_{\min}$

各为多少?

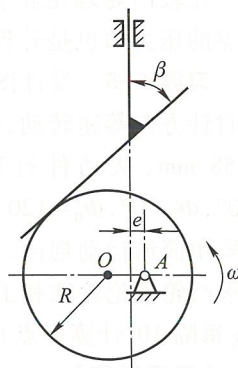


图 6-20

【解题思路及技巧】

本题的关键是对“行程”基本概念的理解。当凸轮回转中心与平底直线间距离最大时,从动件处于最高位置,当凸轮回转中心与平底直线间距离最小时,从动件处于最低位置。最高位置与最低位置间的距离就是从动件的行程。

【解题过程】

(1) 如图 6-21 所示,连接 OA 并延长交凸轮轮廓于点 G , AG 即为凸轮的基圆半径,即

$$r_0 = AG = R - OA = 80\text{ mm} - 30\text{ mm} = 50\text{ mm}$$

(2) 如图 6-21 所示。以 A 为圆心, AG 为半径作基圆;以 A 为圆心,偏距 e 为半径作偏距圆。延长 AO 交凸轮轮廓于点 M 。过点 G 做圆 O 的切线 GT 。按“反转法”,作与偏距圆相切且与 GT 线成 $\beta=45^\circ$ 的机架位置线 A_1B_1 。此时,平底处于最低位置。按同样的方法,作出平底处于最高位置时的机架位置线 A_2B_2 。设 A_1B_1 与 AG 的交点为 C , A_2B_2 与 AM 的交点为 D 。因 $\beta=45^\circ$, A_1 和 A_2 分别为导路线与偏距圆的切点,所以 $CA_1 = DA_2 = e$ 。因此行程 h 为

$$\begin{aligned} h &= A_2B_2 - A_1B_1 \\ &= (DB_2 + DA_2) - (CB_1 + CA_1) \\ &= [(AM - AD) \times \sqrt{2} + e] - [(AG - AC) \times \sqrt{2} + e] \\ &= [(110 - 15\sqrt{2}) \times \sqrt{2} + 15] \text{ mm} - [(50 - 15\sqrt{2}) \times \sqrt{2} + 15] \text{ mm} \\ &= 84.85 \text{ mm} \end{aligned}$$

(3) 由图 6-21 可知,推程运动角 Φ_0 和回程运动角 Φ'_0 相等,均为 180° 。

(4) 该平底从动件凸轮机构的压力角 α 为恒定值 $90^\circ - \beta = 45^\circ$, 所以 $\alpha_{\max} = \alpha_{\min} = 45^\circ$ 。

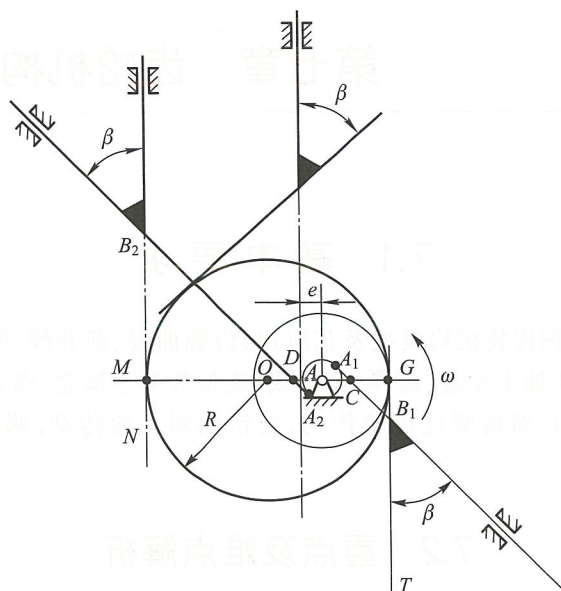


图 6-21

第七章 齿轮机构及其设计

7.1 基本要求

本章主要掌握齿轮机构类型及其应用,齿廓曲线、渐开线、圆柱齿轮参数及其尺寸计算,齿廓加工原理,齿厚、公法线、变位等基本概念,渐开线齿轮啮合传动,变位齿轮传动,斜齿圆柱齿轮传动,交错轴斜齿轮传动,蜗杆传动,锥齿轮传动。

7.2 重点及难点解析

本章重点是渐开线标准直齿圆柱齿轮外啮合传动的基本理论及设计计算,其他齿轮传动副及其啮合传动和设计计算的特点。

7.2.1 本章重点

1. 齿廓啮合基本定律及共轭齿廓

具有任意齿廓的两齿轮啮合时,其瞬时角速度的比值等于齿廓接触点公法线将其中心距分成两段长度的反比,此规律称为齿廓啮合基本定律。

满足齿廓啮合基本定律传动比为常数或按一定规律变化的一对齿廓称为共轭齿廓。

2. 渐开线的性质与渐开线方程

渐开线的性质与渐开线方程是研究渐开线齿轮的基础,只有深入掌握这些内容,才能正确理解一对渐开线齿廓的啮合特性和轮齿啮合过程。

渐开线具有下列性质:

- (1) 发生线在基圆上滚过的线段长度等于基圆上被滚过的圆弧长度。
- (2) 渐开线上任一点的法线切于基圆。
- (3) 基圆以内没有渐开线。
- (4) 渐开线的形状仅取决于其基圆的大小。基圆越小,渐开线越弯曲,基圆越大,渐开线越平直,当基圆半径为无穷大时,渐开线就变成一条直线。
- (5) 同一基圆上,任意两条渐开线间的法向距离相等。

渐开线的极坐标参数方程为

$$\left. \begin{aligned} r_K &= r_b / \cos \alpha_K \\ \theta_K &= \operatorname{inv} \alpha_K = \tan \alpha_K - \alpha_K \end{aligned} \right\}$$

3. 渐开线齿廓的啮合特性

- (1) 传动比恒定;
- (2) 中心距变动不影响传动比;
- (3) 啮合线是过节点的直线。

4. 容易混淆的概念

本章名词、概念多,符号、公式多,齿轮机构的几何关系复杂。学习时要理清主要脉络,对基本概念及几何关系应透彻理解。以下是一些容易混淆的概念。

(1) 法向齿距与基圆齿距

虽然法向齿距与基圆齿距的长度相等($p_n = p_b$),都是相邻两个轮齿同侧齿廓之间度量的长度,但是法向齿距 p_n 是在渐开线齿廓上任意一点的法线上度量的相邻两齿同侧齿廓之间的直线长度,而基圆齿距 p_b 是在基圆上度量的相邻两齿同侧齿廓间的弧线长度。

(2) 分度圆与节圆

分度圆是指单个齿轮上具有标准模数和标准压力角的圆。在设计齿轮时,只要确定了齿数和模数,这个齿轮的分度圆直径就确定下来,即 $d = mz$ 。在加工、安装齿轮和齿轮传动时,分度圆都不会改变。

节圆是一对齿轮在啮合传动时两个相切且作纯滚动的圆,单个齿轮没有节圆。一般情况下,节圆半径与分度圆半径不相等,即节圆与分度圆不重合。只有当啮合角等于分度圆的压力角时,两个节圆半径才分别与两个齿轮的分度圆半径相等,两个节圆才分别与两个齿轮的分度圆重合,这种情况只有在该对齿轮的实际中心距等于标准中心距时才会出现。

(3) 压力角与啮合角

压力角 α 是指单个齿轮渐开线齿廓上某一点的线速度方向与该点法线方向所夹的锐角。渐开线齿廓上各点压力角的大小是不相等的(齿条齿廓例外)。啮合角 α' 是一对齿轮啮合时啮合线与两节圆公切线之间所夹的锐角。由于啮合线是两个齿轮基圆的内公切线,当两个齿轮按确定的中心距安装后,在一个方向只有一条固定的内公切线,所以啮合角的大小不随齿轮啮合过程而发生变化。

(4) 变位齿轮与传动类型

变位齿轮指单个齿轮,分为正变位齿轮和负变位齿轮。而传动类型则是按一对相啮合齿轮的变位系数之和来区分的:当 $x_1 + x_2 > 0$ 时,该对齿轮传动称为正

传动;当 $x_1+x_2<0$ 时,该对齿轮传动称为负传动。在这两种传动类型中的齿轮都可能既有正变位齿轮又有负变位齿轮。如正传动中,两个齿轮可以都是正变位齿轮,也可以一个是正变位齿轮($x_1>0$),另一个是负变位齿轮($x_2<0$),只要 $x_1+x_2>0$,则该对齿轮传动就属于正传动;又如负传动中,两个齿轮可以都是负变位齿轮,也可以一个是正变位齿轮,另一个是负变位齿轮,只要 $x_1+x_2<0$,则该对齿轮传动就属于负传动。

(5) 理论啮合线与实际啮合线

由于基圆以内无渐开线,故对于足够长的一对渐开线而言,其基圆内公切线的两个切点 N_1 和 N_2 分别为起始啮合和终止啮合的极限点,亦即基圆的内公切线 $\overline{N_1N_2}$ 是啮合线的极限长度,称之为理论啮合线,如图 7-1 所示。由于齿轮上所用的渐开线齿廓的长度受到齿顶圆的限制,

所以一对有限长的渐开线齿廓的实际啮合线 $\overline{B_1B_2}$ 的长度小于理论啮合线 $\overline{N_1N_2}$ 。

(6) 齿轮齿条啮合传动与标准齿条型刀具展成加工齿轮

一对齿轮齿条无侧隙啮合传动过程中,存在着 4 个基本因素:两个几何因素——齿轮上的渐开线齿廓和齿条上的直线齿廓(特殊的渐开线);两个运动因素——齿轮的角速度 ω 和齿条的线速度 v 。在这 4 个因素中,只要约定其中任何 3 个因素,就能获得第 4 个因素。在齿轮齿条传动时,齿轮和齿条的齿廓已经确定,只要再给定齿轮的角速度 ω ,就能获得齿条的移动

速度 $v, v=r\omega=\frac{mz}{2}\omega$ 。

标准齿条型刀具展成加工齿轮的运动情况,相当于齿轮齿条啮合传动的情况。不同的是,它是利用机床的传动系统,人为使齿条刀具与被加工齿轮的轮坯按 $v_{\text{刀}}=\frac{mz}{2}\omega_{\text{坯}}$ 的运动关系运动,即已知两个运动因素,另一个已知因素是齿条刀具的直线齿廓。在已知这 3 个因素的情况下,刀具的直线齿廓在运动的过程中必然会在轮坯上切削(包络)出渐开线齿廓。

另外,需注意的是:齿条型刀具的齿顶高比传动用齿条的齿顶高高出一个 $c=c^*m$ 的距离。

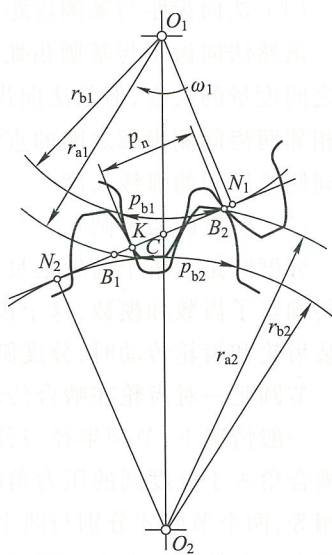


图 7-1

7.2.2 本章难点

1. 渐开线齿轮展成法加工原理。
2. 渐开线齿轮的变位加工原理。
3. 渐开线齿轮传动重合度计算及其物理意义。
4. 中心距与啮合角。
5. 无侧隙啮合方程。

7.3 典型例题分析及解题技巧

例 7-1 已知一对正常齿制外啮合标准直齿圆柱齿轮传动, $m = 4 \text{ mm}$, $z_1 = 20$, $z_2 = 50$ 。求: 两齿轮的分度圆直径、齿顶圆直径、齿根圆直径、基圆直径、齿顶圆齿厚、基圆齿厚、中心距、传动比。

【解题思路及技巧】

本题是直齿圆柱齿轮的基本尺寸和传动尺寸计算问题, 需要记住公式。

【解题过程】

(1) 两齿轮的分度圆直径

$$d_1 = mz_1 = 4 \text{ mm} \times 20 = 80 \text{ mm}$$

$$d_2 = mz_2 = 4 \text{ mm} \times 50 = 200 \text{ mm}$$

(2) 两齿轮的齿顶圆直径

因为齿顶高 $h_a = h_a^* m = 1 \times 4 \text{ mm} = 4 \text{ mm}$, 所以

$$d_{a1} = d_1 + 2 \times h_a = 80 \text{ mm} + 2 \times 4 \text{ mm} = 88 \text{ mm}$$

$$d_{a2} = d_2 + 2 \times h_a = 200 \text{ mm} + 2 \times 4 \text{ mm} = 208 \text{ mm}$$

(3) 两齿轮的齿根圆直径

因为齿根高 $h_f = h_a^* m + c^* m = 1 \times 4 \text{ mm} + 0.25 \times 4 \text{ mm} = 5 \text{ mm}$, 所以

$$d_{f1} = d_1 - 2 \times h_f = 80 \text{ mm} - 2 \times 5 \text{ mm} = 70 \text{ mm}$$

$$d_{f2} = d_2 - 2 \times h_f = 200 \text{ mm} - 2 \times 5 \text{ mm} = 190 \text{ mm}$$

(4) 两齿轮的基圆直径

因标准齿轮的压力角 $\alpha = 20^\circ$, 所以

$$d_{b1} = d_1 \cos \alpha = 80 \text{ mm} \times \cos 20^\circ \approx 75.175 \text{ mm}$$

$$d_{b2} = d_2 \cos \alpha = 200 \text{ mm} \times \cos 20^\circ \approx 187.939 \text{ mm}$$

(5) 两齿轮的齿顶圆齿厚和基圆齿厚

因为 $s_1 = s_2 = s = \frac{\pi m}{2} = \frac{4\pi}{2} \text{ mm} \approx 6.283 \text{ mm}$

$$\alpha_{a1} = \arccos \frac{r_{b1}}{r_{a1}} = \arccos \left(\frac{75.175/2}{88/2} \right) = 31.322^\circ$$

$$\alpha_{a2} = \arccos \frac{r_{b2}}{r_{a2}} = \arccos \left(\frac{187.939/2}{208/2} \right) = 25.371^\circ$$

$$\alpha_{b1} = 0^\circ, \alpha_{b2} = 0^\circ$$

所以

$$\begin{aligned} s_{a1} &= s \frac{r_{a1}}{r_1} - 2r_{a1}(\operatorname{inv} \alpha_{a1} - \operatorname{inv} \alpha) \\ &= \left[6.283 \times \frac{88/2}{80/2} - 88 \times (0.061\,864 - 0.014\,904) \right] \text{mm} = 2.779 \text{ mm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_{a2} &= s \frac{r_{a2}}{r_2} - 2r_{a2}(\operatorname{inv} \alpha_{a2} - \operatorname{inv} \alpha) \\ &= \left[6.283 \times \frac{208/2}{200/2} - 208 \times (0.031\,407 - 0.014\,904) \right] \text{mm} = 3.102 \text{ mm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_{b1} &= s \frac{r_{b1}}{r_1} - 2r_{b1}(\operatorname{inv} \alpha_{b1} - \operatorname{inv} \alpha) \\ &= \left[6.283 \times \frac{75.175/2}{80/2} - 75.175 \times (0 - 0.014\,904) \right] \text{mm} = 7.024 \text{ mm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_{b2} &= s \frac{r_{b2}}{r_2} - 2r_{b2}(\operatorname{inv} \alpha_{b2} - \operatorname{inv} \alpha) \\ &= \left[6.283 \times \frac{187.939/2}{200/2} - 187.939 \times (0 - 0.014\,904) \right] \text{mm} = 8.712 \text{ mm} \end{aligned}$$

(6) 中心距

$$a = \frac{d_1 + d_2}{2} = \frac{80 + 200}{2} \text{mm} = 140 \text{ mm}$$

(7) 传动比

$$i = \frac{z_2}{z_1} = \frac{50}{20} = 2.5$$

例 7-2 一对标准安装的外啮合斜齿圆柱齿轮传动(正常齿制)。已知:

$m_n = 4 \text{ mm}$, $z_1 = 20$, $z_2 = 50$, 中心距 $a = 150 \text{ mm}$, 试求:

(1) 螺旋角 β ;

(2) 齿轮 1 的分度圆直径 d_1 及齿顶圆直径 d_{a1} ;

(3) 齿轮 1 的当量齿数 z_{v1} 。

【解题思路及技巧】

本题是斜齿圆柱齿轮传动相关尺寸计算问题,需要记住公式。

【解题过程】

(1) 因为 $a = \frac{m_n(z_1+z_2)}{2\cos\beta}$, 所以

$$\beta = \arccos \left[\frac{m_n(z_1+z_2)}{2a} \right] = \arccos \frac{4 \times (20+50)}{2 \times 150} = 21.039^\circ$$

(2) $d_1 = \frac{m_n z_1}{\cos\beta} = \frac{4 \text{ mm} \times 20}{\cos\beta} = 85.714 \text{ mm}$

$$d_{a1} = d_1 + 2h_{an}^* m_n = 85.714 \text{ mm} + 2 \times 1 \times 4 \text{ mm} = 93.714 \text{ mm}$$

(3) $z_{v1} = \frac{z_1}{\cos^3\beta} = \frac{20}{\cos^3\beta} = 24.6$

例 7-3 一对标准斜齿圆柱齿轮传动,已知: $z_1 = 20, z_2 = 40, m_n = 8 \text{ mm}, \alpha_n = 20^\circ, \beta = 30^\circ, h_{an}^* = 1$ 。试求:

(1) 中心距 a ;

(2) 重合度;

(3) 基圆柱上的螺旋角 β_b 。

【解题思路及技巧】

本题是斜齿圆柱齿轮传动相关尺寸计算问题,需要记住公式。

【解题过程】

(1) $a = \frac{m_n(z_1+z_2)}{2\cos\beta} = \frac{8 \text{ mm} \times (20+40)}{2 \times \cos 30^\circ} = 277.136 \text{ mm}$

(2) 因 $\alpha_t = \arctan \frac{\tan \alpha_n}{\cos \beta} = \arctan \frac{\tan 20^\circ}{\cos 30^\circ} = 22.796^\circ$

$$\alpha_{at1} = \arccos \frac{r_{b1}}{r_{a1}} = \arccos \frac{r_1 \cos \alpha_1}{r_1 + h_{an}^* m_n} = \arccos \frac{\frac{1}{2} \times 184.75 \times \cos 22.796^\circ}{\frac{1}{2} \times 184.75 + 1 \times 8} = 31.96^\circ$$

$$\alpha_{at2} = \arccos \frac{r_{b2}}{r_{a2}} = \arccos \frac{r_2 \cos \alpha_2}{r_2 + h_{an}^* m_n} = \arccos \frac{\frac{1}{2} \times 369.50 \times \cos 22.796^\circ}{\frac{1}{2} \times 369.50 + 1 \times 8} = 27.92^\circ$$

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{\gamma} &= \varepsilon_{\alpha} + \varepsilon_{\beta} = \frac{z_1}{2\pi} (\tan \alpha_{at_1} - \tan \alpha_t) + \frac{z_2}{2\pi} (\tan \alpha_{at_2} - \tan \alpha_t) + \frac{B \sin \beta}{\pi m_n} \\
 &= \frac{1}{2\pi} [20 \times (\tan 31.96^\circ - \tan 22.796^\circ) + 40 \times (\tan 27.92^\circ - \tan 22.796^\circ)] + \\
 &\quad \frac{30 \sin 30^\circ}{8\pi} \\
 &= 1.94
 \end{aligned}$$

$$(3) \beta_b = \arccos \left(\cos \beta \frac{\cos \alpha_n}{\cos \alpha_t} \right) = \arccos \left(\cos 30^\circ \times \frac{\cos 20^\circ}{\cos 22.796^\circ} \right) = 28.024^\circ$$

例 7-4 用齿条插刀加工一直齿圆柱齿轮。已知被加工齿轮坯的角速度 $\omega_1 = 5 \text{ rad/s}$, 刀具移动速度为 0.375 m/s , 刀具的模数 $m = 10 \text{ mm}$, 压力角 $\alpha = 20^\circ$, 试:

- (1) 求被加工齿轮的齿数;
- (2) 若齿条插刀分度线与被加工齿轮中心的距离为 77 mm , 求被加工齿轮的分度圆齿厚;
- (3) 若已知该齿轮与大齿轮 2 相啮合时的传动比 $i_{12} = 4$, 当进行无齿侧间隙的准确安装时, 中心距 $a = 377 \text{ mm}$, 求这两个齿轮的节圆半径 r'_1, r'_2 及啮合角 α' 。

【解题思路及技巧】

本题的解题关键是明确用齿条插刀展成加工齿轮时的运动条件和位置条件。运动条件为: $v_{\text{刀}} = r\omega$, 它直接关系到被加工齿轮的齿数; 位置条件为: $L = r + xm$, 它直接关系到被加工齿轮的变位系数。

【解题过程】

(1) 由于用齿条插刀加工齿轮时, 被加工齿轮的节圆与其分度圆重合, 且与刀具的节线作展成运动, 则有 $r_1 \omega_1 = v_{\text{刀}}$, 又因 $r_1 = mz_1/2$, 所以

$$z_1 = 2v_{\text{刀}}/m\omega_1 = 2 \times 375 / (10 \times 5) = 15$$

(2) 因刀具安装的距离 $L = 77 \text{ mm}$, 大于被加工齿轮的分度圆半径 $r_1 = 75 \text{ mm}$, 则被加工齿轮为正变位, 其变位量为 $xm = L - r_1 = 77 \text{ mm} - 75 \text{ mm} = 2 \text{ mm}$, 由此得 $x = xm/m = 2/10 = 0.2$, 故被加工齿轮的分度圆齿厚为

$$s = (\pi/2 + 2x \tan \alpha) m = (\pi/2 + 2 \times 0.2 \times \tan 20^\circ) \times 10 \text{ mm} = 17.164 \text{ mm}$$

$$(3) \text{ 因为 } z_2 = i_{12} z_1 = 4 \times 15 = 60, i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r'_2}{r'_1} = 4, \text{ 即 } r'_2 = 4r'_1, r'_1 + r'_2 = a' = 377 \text{ mm},$$

所以

$$r'_1 = 75.4 \text{ mm}, \quad r'_2 = 301.6 \text{ mm}。$$

两齿轮的理论中心距为

$$a = m(z_1 + z_2)/2 = 10 \text{ mm} \times (15 + 60)/2 = 375 \text{ mm}$$

由式 $a' \cos \alpha' = a \cos \alpha$ 可求得

$$\cos \alpha' = a \cos \alpha / a' = 375 \times \cos 20^\circ / 377 = 0.93471$$

故得

$$\alpha' = 20.819^\circ$$

7.4 习题解答

习题 7-1 图 7-2 所示为齿条与齿轮啮合,若已知齿条齿廓 K_1 为直线,而且其齿形角 $\alpha = 20^\circ$,试用作图法或解析法求出与其共轲的齿轮齿廓 K_2 (设齿轮节圆半径 $r = 100 \text{ mm}$,齿条全齿高为 20 mm)。

【解题思路及技巧】

本题解题的关键是深入理解用齿廓法线法求共轲齿廓。

【解题过程】

(1) 用作图法求齿轮齿廓 K_2

1) 如图 7-3 所示,过节点 C 作齿廓 K_1 的法线 $n-n$ 。

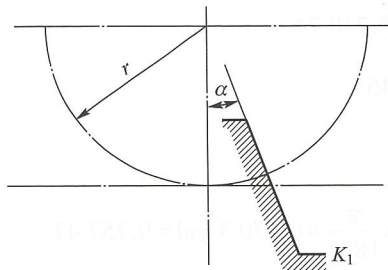


图 7-2

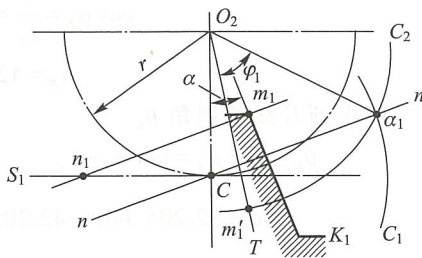


图 7-3

2) 在齿廓 K_1 上取足够近的若干点 $m_1, m_2, \dots$, 过这些点作齿廓 K_1 的法线交节线 S_1 于点 $n_1, n_2, \dots$ 。

3) 以点 C 为圆心, 以 $\overline{Cn_1m_1}$ 为半径作圆弧 C_1 , 交法线 $n-n$ 于点 a_1 。

4) 以齿轮的圆心 O_2 为圆心, 以 $\overline{O_2a_1}$ 为半径作圆弧 C_2 。

5) 过点 O_2 作射线 T , 使其与线段 O_2a_1 的夹角为 φ_1

$$\varphi_1 = \frac{\overline{n_1 C}}{r} \frac{180^\circ}{\pi}$$

射线 T 与圆弧 C_2 交于点 m'_1 , 此点就是齿廓 K_2 上的点。

6) 用上述方法, 可以依次求出齿廓 K_2 上的其他各点 $m'_2, m'_3, \dots$ 。

(2) 用解析法求齿轮齿廓 K_2

略。

习题 7-2 图 7-4 所示渐开线齿廓中, 基圆半径 $r_b = 100 \text{ mm}$, 试求出:

(1) 当 $r_K = 135 \text{ mm}$ 时, 渐开线的展角 θ_K , 渐开线压力角 α_K 和渐开线在点 K 的曲率半径 ρ_K 。

(2) 当 $\theta_K = 20^\circ, 25^\circ$ 和 30° 时, 渐开线的压力角 α_K 和向径 r_K 。

【解题思路及技巧】

本题解题的关键是深入理解渐开线的形成及基本概念。

【解题过程】

(1) 求当 $r_K = 135 \text{ mm}$ 时, 渐开线的展角 θ_K , 渐开线压力角 α_K 和渐开线在 K 点的曲率半径 ρ_K 。

1) 求渐开线压力角 α_K

$$\cos \alpha_K = \frac{r_b}{r_K} = \frac{100}{135} = 0.74074$$

$$\alpha_K = 42.205446^\circ$$

2) 求渐开线的展角 θ_K

$$\theta_K = \text{inv } \alpha_K = \tan \alpha_K - \alpha_K$$

$$= \tan 42.205446^\circ - 42.205446^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ} = 0.1703 \text{ rad} = 9.75747^\circ$$

3) 求渐开线在点 K 的曲率半径 ρ_K

$$\rho_K = \sqrt{r_K^2 - r_b^2} = \sqrt{135^2 - 100^2} \text{ mm} = 90.6918 \text{ mm}$$

(2) 求当 $\theta_K = 20^\circ, 25^\circ$ 和 30° 时, 渐开线的压力角 α_K 和向径 r_K 。

根据渐开线函数 $\theta_K = \text{inv } \alpha_K = \tan \alpha_K - \alpha_K$ 可得到非线性方程 $\tan \alpha_K - \alpha_K - \theta_K = 0$ 。在已知 θ_K 的情况下, 根据该方程即可求得压力角 α_K 。

1) 求当 $\theta_K = 20^\circ$ 时, 渐开线的压力角 α_K 和向径 r_K

求解非线性方程

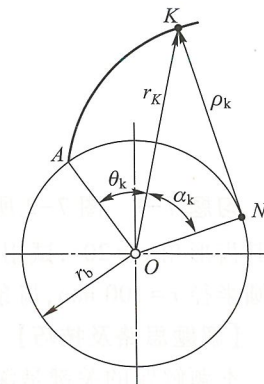


图 7-4

$$\tan \alpha_K - \alpha_K - 20^\circ \times \frac{3.141\,592\,6}{180^\circ} = 0$$

$$\alpha_K = 51.160\,1^\circ$$

渐开线的向径 r_K

$$r_K = \frac{r_b}{\cos \alpha_K} = \frac{100}{\cos 51.160\,1^\circ} = 159.452\,4\text{ mm}$$

2) 求当 $\theta_K = 25^\circ$ 时, 渐开线的压力角 α_K 和向径 r_K
求解非线性方程

$$\tan \alpha_K - \alpha_K - 25^\circ \times \frac{3.141\,592\,6}{180^\circ} = 0$$

得渐开线的压力角 α_K

$$\alpha_K = 54.073\,2^\circ$$

渐开线的向径 r_K

$$r_K = \frac{r_b}{\cos \alpha_K} = \frac{100\text{ mm}}{\cos 54.073\,2^\circ} = 170.430\text{ mm}$$

3) 求当 $\theta_K = 30^\circ$ 时, 渐开线的压力角 α_K 和向径 r_K

求解非线性方程

$$\tan \alpha_K - \alpha_K - 30^\circ \times \frac{3.141\,592\,6}{180^\circ} = 0$$

得渐开线的压力角 α_K

$$\alpha_K = 56.471\,7^\circ$$

渐开线的向径 r_K

$$r_K = \frac{r_b}{\cos \alpha_K} = \frac{100\text{ mm}}{\cos 56.471\,7^\circ} = 181.045\text{ mm}$$

习题 7-3 今测得一渐开线直齿标准圆柱齿轮齿顶圆直径 $d_a = 110\text{ mm}$, 齿根圆直径 $d_f = 87.5\text{ mm}$, 齿数 $z = 20$, 试确定该齿轮的模数 m , 齿顶高系数 h_a^* 和顶隙系数 c^* 。

【解题思路及技巧】

习题 7-3~7-8 都是齿轮几何尺寸计算问题, 需记住公式。

【解题过程】

该齿轮的分度圆直径 d 为

$$d = mz$$

根据齿顶高的定义和计算公式有

$$\frac{d_a - d}{2} = h_a^* m$$

$$\frac{d_a}{2} - \frac{mz}{2} = h_a^* m \quad (\text{a})$$

把 d_a 、 z 的已知数代入式(a)则得

$$55 - 10m = h_a^* m \quad (\text{b})$$

由于该齿轮为标准齿轮,其齿顶高系数的取值只有两种可能性,即

$$h_a^* = 0.8 \text{ 或 } h_a^* = 1$$

若取 $h_a^* = 0.8$ 代入式(b),则得

$$m \approx 5.09 \text{ mm}$$

该模数不是渐开线标准齿轮标准模数系列中的值,不能选取该值。

若取 $h_a^* = 1$ 代入式(b),则得

$$m = 5 \text{ mm}$$

该模数是渐开线齿轮标准模数系列中的值,可以选取。由此,得到该齿轮的齿顶高系数和模数 m 为

$$h_a^* = 1$$

$$m = 5 \text{ mm}$$

根据齿根高的定义和计算公式得

$$\frac{d - d_f}{2} = h_a^* m + c^* m$$

$$c^* = \frac{z}{2} - \frac{d_f}{2m} - h_a^* \quad (\text{c})$$

把 h_a^* 、 m 、 z 、 d_f 的值代入式(c)得

$$c^* = \frac{z}{2} - \frac{d_f}{2m} - h_a^* = \frac{20}{2} - \frac{87.5}{2 \times 5} - 1 = 0.25$$

径向间隙系数的标准值为 0.25 和 0.3,由此可见计算正确。

习题 7-4 已知一对外啮合渐开线直齿圆柱齿轮,齿数 $z_1 = 20$, $z_2 = 41$,模数 $m = 2 \text{ mm}$, $h_a^* = 1$, $c^* = 0.25$, $\alpha = 20^\circ$ 。求:

(1) 当该对齿轮为标准齿轮时,试计算齿轮的分度圆直径 d_1 、 d_2 ,基圆直径 d_{b1} 、 d_{b2} ,齿顶圆直径 d_{a1} 、 d_{a2} ,齿根圆直径 d_{f1} 、 d_{f2} ,分度圆上的齿距 p 、齿厚 s 和齿槽宽 e 。

(2) 当该对齿轮为标准齿轮且为正确安装时的中心距 a ,求出齿轮 1 的齿

顶压力角 α_{a1} , 齿顶处齿廓的曲率半径 ρ_{a1} 。

【解题过程】

(1) 计算分度圆直径

$$d_1 = mz_1 = 2 \text{ mm} \times 20 = 40 \text{ mm}$$

$$d_2 = mz_2 = 2 \text{ mm} \times 41 = 82 \text{ mm}$$

计算基圆直径

$$d_{b1} = d_1 \cos \alpha = 40 \times \cos 20^\circ = 40 \text{ mm} \times 0.9397 = 37.59 \text{ mm}$$

$$d_{b2} = d_2 \cos \alpha = 82 \times \cos 20^\circ = 82 \text{ mm} \times 0.9397 = 77.06 \text{ mm}$$

计算齿顶圆直径

$$d_{a1} = d_1 + 2h_a^* m = 40 \text{ mm} + 2 \times 1 \times 2 \text{ mm} = 44 \text{ mm}$$

$$d_{a2} = d_2 + 2h_a^* m = 82 \text{ mm} + 2 \times 1 \times 2 \text{ mm} = 86 \text{ mm}$$

计算齿根圆直径

$$d_{f1} = d_1 - 2h_a^* m - 2c^* m = 40 \text{ mm} - 2 \times 1 \times 2 \text{ mm} - 2 \times 0.25 \times 2 \text{ mm} = 35 \text{ mm}$$

$$d_{f2} = d_2 - 2h_a^* m - 2c^* m = 82 \text{ mm} - 2 \times 1 \times 2 \text{ mm} - 2 \times 0.25 \times 2 \text{ mm} = 77 \text{ mm}$$

计算分度圆上的齿距、齿厚、齿槽宽

$$p = \pi m = 3.14 \times 2 \text{ mm} = 6.28 \text{ mm}$$

$$s = \frac{1}{2} \pi m = \frac{1}{2} \times 3.14 \times 2 \text{ mm} = 3.14 \text{ mm}$$

$$e = \frac{1}{2} \pi m = \frac{1}{2} \times 3.14 \times 2 \text{ mm} = 3.14 \text{ mm}$$

(2) 计算标准中心距

$$a = \frac{1}{2} m (z_1 + z_2) = 61 \text{ mm}$$

计算齿顶压力角

$$\cos \alpha_{a1} = \frac{d_{b1}}{d_{a1}} = \frac{37.59}{44} = 0.854$$

$$\alpha_{a1} = \arccos 0.854 = 31.32^\circ$$

计算齿顶处齿廓的曲率半径

$$\rho_{a1} = \frac{1}{2} d_{b1} \tan \alpha_{a1} = \frac{1}{2} \times 37.59 \text{ mm} \times \tan 31.32^\circ = 11.44 \text{ mm}$$

习题 7-5 渐开线标准齿轮的基圆和齿根圆重合时的齿数为多少(考虑正常齿和短齿两种情况)? 齿数为多少时基圆大于齿根圆?

【解题过程】

齿轮的基圆直径为

$$d_b = d \cos \alpha = mz \cos \alpha$$

齿轮的齿根圆直径为

$$d_f = d - 2h_f = mz - 2(h_a^* + c^*)m$$

基圆与齿根圆重合时有

$$d_b = d_f$$

即

$$mz \cos \alpha = mz - 2(h_a^* + c^*)m$$

基圆与齿根圆重合时齿轮齿数为

$$z = \frac{2(h_a^* + c^*)}{1 - \cos \alpha}$$

短齿时, $h_a^* = 0.8$, $c^* = 0.3$, 基圆与齿根圆重合时齿轮齿数为

$$z = \frac{2(h_a^* + c^*)}{1 - \cos \alpha} = \frac{2 \times (0.8 + 0.3)}{1 - \cos 20^\circ} \approx 36.48$$

正常齿时, $h_a^* = 1$, $c^* = 0.25$, 基圆与齿根圆重合时齿轮齿数为

$$z = \frac{2(h_a^* + c^*)}{1 - \cos \alpha} = \frac{2 \times (1 + 0.25)}{1 - \cos 20^\circ} \approx 41.45$$

基圆大于齿根圆时有

$$d_b > d_f$$

即

$$mz \cos \alpha > mz - 2(h_a^* + c^*)m$$

$$z < \frac{2(h_a^* + c^*)}{1 - \cos \alpha}$$

短齿时, 基圆大于齿根圆时齿轮齿数为

$$z < \frac{2(h_a^* + c^*)}{1 - \cos \alpha} = \frac{2 \times (0.8 + 0.3)}{1 - \cos 20^\circ} \approx 36.48$$

圆整后

$$z \leq 36$$

正常齿时,基圆大于齿根圆时齿轮齿数为

$$z < \frac{2(h_a^* + c^*)}{1 - \cos \alpha} = \frac{2 \times (1 + 0.25)}{1 - \cos 20^\circ} \approx 41.45$$

圆整后

$$z \leq 41$$

习题 7-6 已知一对外啮合渐开线标准直齿圆柱齿轮,其传动比 $i_{12} = 2.4$, 模数 $m = 5 \text{ mm}$, 压力角 $\alpha = 20^\circ$, $h_a^* = 1$, $c^* = 0.25$, 中心距 $a = 170 \text{ mm}$, 试求该对齿轮的齿数 z_1, z_2 , 分度圆直径 d_1, d_2 , 齿顶圆直径 d_{a1}, d_{a2} , 基圆直径 d_{b1}, d_{b2} 。

【解题过程】

(1) 求齿轮的齿数

根据传动比

$$i_{12} = \frac{z_2}{z_1} = 2.4 \quad (\text{a})$$

由于该对齿轮是标准传动,则其中心距为

$$a = \frac{1}{2} m (z_1 + z_2) \quad (\text{b})$$

联立本题中式(a)、(b)可以求出 z_1 和 z_2 , 即

$$z_1 = 20$$

$$z_2 = 48$$

(2) 求齿轮的分度圆直径

$$d_1 = mz_1 = 5 \text{ mm} \times 20 = 100 \text{ mm}$$

$$d_2 = mz_2 = 5 \text{ mm} \times 48 = 240 \text{ mm}$$

(3) 求齿轮的齿顶圆直径

$$d_{a1} = mz_1 + 2h_a^* m = 5 \text{ mm} \times 20 + 2 \times 1 \times 5 \text{ mm} = 110 \text{ mm}$$

$$d_{a2} = mz_2 + 2h_a^* m = 5 \text{ mm} \times 48 + 2 \times 1 \times 5 \text{ mm} = 250 \text{ mm}$$

(4) 求基圆直径

$$d_{b1} = d_1 \cos \alpha = 100 \text{ mm} \times \cos 20^\circ = 93.969 \text{ mm}$$

$$d_{b2} = d_2 \cos \alpha = 240 \text{ mm} \times \cos 20^\circ = 225.526 \text{ mm}$$

习题 7-7 试指出习题 7-6 的一对齿轮中,哪一个齿轮的基圆齿厚 s_b 大一些? 计算出该对齿轮的公法线长度和相应的跨齿数。

【解题过程】

(1) 计算基圆齿厚

根据基圆的齿厚计算公式

$$s_b = s \cos \alpha + m z \cos \alpha \operatorname{inv} \alpha$$

题 7-6 中的两个齿轮的基圆齿厚分别为

$$s_{b1} = s \cos \alpha + m z_1 \cos \alpha \operatorname{inv} \alpha$$

$$s_{b2} = s \cos \alpha + m z_2 \cos \alpha \operatorname{inv} \alpha$$

由上式可以看出: $z_2 > z_1$ 时 $s_{b2} > s_{b1}$, 即齿数大的齿轮基圆齿厚大一些。

(2) 求跨齿数

根据跨齿数计算公式

$$k = \frac{\alpha}{180^\circ} z + 0.5$$

两个齿轮的跨齿数分别为

$$k_1 = \frac{20^\circ}{180^\circ} z_1 + 0.5 = \frac{20^\circ}{180^\circ} \times 20 + 0.5 = 2.72 \approx 3$$

$$k_2 = \frac{20^\circ}{180^\circ} z_2 + 0.5 = \frac{20^\circ}{180^\circ} \times 48 + 0.5 = 5.83 \approx 6$$

(3) 求公法线长度

根据公法线长度计算公式

$$W_k = m \cos \alpha [(k - 0.5) \pi + z \operatorname{inv} \alpha]$$

两个齿轮的公法线长度分别为

$$W_3^{(1)} = m \cos \alpha [(k_1 - 0.5) \pi + z_1 \operatorname{inv} \alpha]$$

$$= 5 \times \cos 20^\circ \times \left[2.5 \pi + 20 \times \left(\tan 20^\circ - \frac{20^\circ \times \pi}{180^\circ} \right) \right] \text{ mm} = 38.302 \text{ mm}$$

$$W_6^{(2)} = m \cos \alpha [(k_2 - 0.5) \pi + z_2 \operatorname{inv} \alpha]$$

$$= 5 \times \cos 20^\circ \times \left[5.5 \pi + 48 \times \left(\tan 20^\circ - \frac{20^\circ \times \pi}{180^\circ} \right) \right] \text{ mm} = 84.545 \text{ mm}$$

习题 7-8 设计一对外啮合的标准直齿圆柱齿轮传动。要求传动比 $i_{12} =$

$\frac{n_1}{n_2} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{8}{5}$, 安装中心距 $a' = 78 \text{ mm}$ 。根据强度的需要, 取模数 $m = 3 \text{ mm}$ 。采取

标准齿形, 齿顶高系数 $h_a^* = 1$, 试确定这对齿轮的齿数 z_1, z_2 , 并计算这对齿轮的各部分尺寸: $d, d_b, h_a, h_f, h, d_a, d_f, p, s, e$ 。

【解题过程】

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{8}{5} \quad (\text{a})$$

又因

$$a' = \frac{m}{2}(z_1 + z_2)$$

$$78 = \frac{3}{2}(z_1 + z_2)$$

即

$$z_1 + z_2 = 52 \quad (\text{b})$$

联立本题中式(a)和式(b),解得 $z_1 = 20, z_2 = 32$ 。

两齿轮各部分尺寸如下:

$$d_1 = mz_1 = 3 \times 20 = 60 \text{ mm}$$

$$d_2 = mz_2 = 3 \times 32 = 96 \text{ mm}$$

$$d_{b1} = d_1 \cos \alpha = 60 \times \cos 20^\circ = 60 \times 0.9397 = 56.38 \text{ mm}$$

$$d_{b2} = d_2 \cos \alpha = 96 \times \cos 20^\circ = 96 \times 0.9397 = 90.21 \text{ mm}$$

$$h_{a1} = h_{a2} = h_a = mh_a^* = 3 \times 1 = 3 \text{ mm}$$

$$h_{f1} = h_{f2} = h_f = m(h_a^* + c^*) = 3 \times 1.25 = 3.75 \text{ mm}$$

$$h_1 = h_2 = h = h_a + h_f = 6.75 \text{ mm}$$

$$d_{a1} = d_1 + 2h_a = 66 \text{ mm}$$

$$d_{a2} = d_2 + 2h_a = 102 \text{ mm}$$

$$d_{f1} = d_1 - 2h_f = 52.5 \text{ mm}$$

$$d_{f2} = d_2 - 2h_f = 88.5 \text{ mm}$$

$$p_1 = p_2 = p = \pi m = 9.426 \text{ mm}$$

$$s_1 = s_2 = s = \frac{p}{2} = 4.713 \text{ mm}$$

$$e_1 = e_2 = e = \frac{p}{2} = 4.713 \text{ mm}$$

习题 7-9 加工齿数 $z=12$ 的正常齿制齿轮时,为了不产生根切,其最小变位系数为多少?若选取的变位系数小于或大于此值,会对齿轮的分度圆齿厚和齿顶厚度产生什么影响?

【解题思路及技巧】

本题是考核齿轮的根切与变位问题,需记住公式。

【解题过程】

加工渐开线正常齿制齿轮时不产生根切的最小变位系数为

$$x_{\min} = h_a^* \frac{z_{\min} - z}{z_{\min}}$$

其中

$$z_{\min} = \frac{2h_a^*}{\sin^2 \alpha} = \frac{2 \times 1}{\sin^2 20^\circ} \approx 17$$

$$x_{\min} = \frac{17-12}{17} = 0.294$$

当变位系数为不产生根切最小变位系数 $x_{\min}$ 时, 齿轮的分度圆齿厚为

$$s_{x_{\min}} = \frac{1}{2} \pi m + 2x_{\min} m \tan \alpha$$

当变位系数为任意变位系数 x 时, 齿轮的分度圆齿厚为

$$s_x = \frac{1}{2} \pi m + 2x m \tan \alpha$$

$$s_x - s_{x_{\min}} = 2(x - x_{\min}) m \tan \alpha$$

由上式可知: 当 $x > x_{\min}$ 时

$$s_x > s_{x_{\min}}$$

当 $x < x_{\min}$ 时

$$s_x < s_{x_{\min}}$$

由此可以得出结论: 分度圆齿厚随着变位系数的增大而增大, 随着变位系数的减小而减小。

设模数 $m = 1 \text{ mm}$, 当变位系数 $x = 0$ 时,

齿顶圆半径为

$$r_a = \frac{1}{2} m z + h_a^* m = \frac{1}{2} \times 1 \text{ mm} \times 12 + 1 \times 1 \text{ mm} = 7 \text{ mm}$$

分度圆半径为

$$r = \frac{1}{2} m z = \frac{1}{2} \times 1 \text{ mm} \times 12 = 6 \text{ mm}$$

齿顶圆压力角为

$$\cos \alpha_a = \frac{r \cos \alpha}{r_a} = \frac{6 \times \cos 20^\circ}{7} = 0.8054508$$

$$\alpha_a = 36.346^\circ$$

分度圆齿厚为

$$s = \frac{1}{2}\pi m = \frac{1}{2} \times 3.141\,592\,6 \times 1\,\text{mm} = 1.570\,79\,\text{mm}$$

齿顶圆齿厚为

$$\begin{aligned} s_a &= s \frac{r_a}{r} - 2r_a (\operatorname{inv} \alpha_a - \operatorname{inv} \alpha) \\ &= \frac{1.570\,79 \times 7}{6} \text{mm} - 2 \times 7\,\text{mm} \times \left(\tan 36.346^\circ - \frac{36.346^\circ \times \pi}{180^\circ} - \tan 20^\circ + \frac{20^\circ \times \pi}{180^\circ} \right) \\ &= 0.620\,92\,\text{mm} \end{aligned}$$

当变位系数 $x = x_{\min} = 0.294$ 时, 齿顶圆半径为

$$r_a = \frac{1}{2}mz + h_a^* m + x_{\min} m = \frac{1}{2} \times 1\,\text{mm} \times 12 + 1 \times 1\,\text{mm} + 0.294 \times 1\,\text{mm} = 7.294\,\text{mm}$$

分度圆半径为

$$r = \frac{1}{2}mz = \frac{1}{2} \times 1\,\text{mm} \times 12 = 6\,\text{mm}$$

齿顶圆压力角为

$$\cos \alpha_a = \frac{r \cos \alpha}{r_a} = \frac{6 \times \cos 20^\circ}{7.294} = 0.772\,985\,4$$

$$\alpha_a = 39.377^\circ$$

分度圆齿厚为

$$s = \frac{1}{2}\pi m + 2x_{\min} m \tan \alpha = \frac{1}{2} \times 3.141\,592\,6 \times 1\,\text{mm} + 2 \times 0.294 \times 1\,\text{mm} \times \tan 20^\circ = 1.784\,8\,\text{mm}$$

齿轮的齿顶圆齿厚为

$$\begin{aligned} s_a &= s \frac{r_a}{r} - 2r_a (\operatorname{inv} \alpha_a - \operatorname{inv} \alpha) \\ &= \left[\frac{1.784\,8 \times 7.294}{6} - 2 \times 7.294 \times \left(\tan 39.377^\circ - \frac{39.377^\circ \times \pi}{180^\circ} - \tan 20^\circ + \frac{20^\circ \times \pi}{180^\circ} \right) \right] \text{mm} \\ &= 0.439\,96\,\text{mm} \end{aligned}$$

当变位系数 $x = 0.3 > x_{\min}$ 时, 齿顶圆半径为

$$r_a = \frac{1}{2}mz + h_a^* m + xm = \frac{1}{2} \times 1\,\text{mm} \times 12 + 1 \times 1\,\text{mm} + 0.3 \times 1\,\text{mm} = 7.3\,\text{mm}$$

分度圆半径为

$$r = \frac{1}{2} m z = \frac{1}{2} \times 1 \text{ mm} \times 12 = 6 \text{ mm}$$

齿顶圆压力角为

$$\cos \alpha_a = \frac{r \cos \alpha}{r_a} = \frac{6 \times \cos 20^\circ}{7.3} = 0.772 \ 35$$

$$\alpha_a = 39.434 \ 6^\circ$$

分度圆齿厚为

$$s = \frac{1}{2} \pi m + 2 x m \tan \alpha = \frac{1}{2} \times 3.141 \ 592 \ 6 \times 1 \text{ mm} + 2 \times 0.3 \times 1 \text{ mm} \times \tan 20^\circ = 1.789 \ 2 \text{ mm}$$

齿顶圆齿厚为

$$\begin{aligned} s_a &= s \frac{r_a}{r} - 2 r_a (\operatorname{inv} \alpha_a - \operatorname{inv} \alpha) \\ &= \left[\frac{1.789 \ 2 \times 7.3}{6} - 2 \times 7.3 \times \left(\tan 39.434 \ 6^\circ - \frac{39.434 \ 6^\circ \times \pi}{180^\circ} - \tan 20^\circ + \frac{20^\circ \times \pi}{180^\circ} \right) \right] \text{ mm} \\ &= 0.435 \ 8 \text{ mm} \end{aligned}$$

由此可见,随着变位系数的增大,齿轮的齿顶厚减小。

习题 7-10 图 7-5 中给出了两对齿轮的齿顶圆和基圆,试分别在此两图上画出齿轮的啮合线,并标出:极限啮合点 N_1 、 N_2 ,实际啮合的开始点和终止点 B_2 、 B_1 ,啮合角 α' ,节圆和节点 C ,以及二齿轮的转向(齿轮 1 为主动轮)。

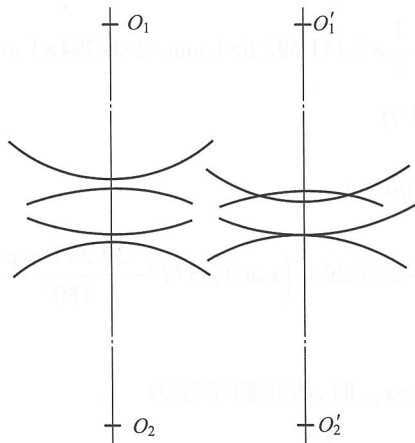


图 7-5

【解题思路及技巧】

本题是齿轮啮合传动问题,考核以下概念:理论啮合线、实际啮合线、节圆及啮合角。

【解题过程】

设齿轮 1 为主动轮,并且顺时针转动,此时两对齿轮的啮合线如图 7-6 所示。

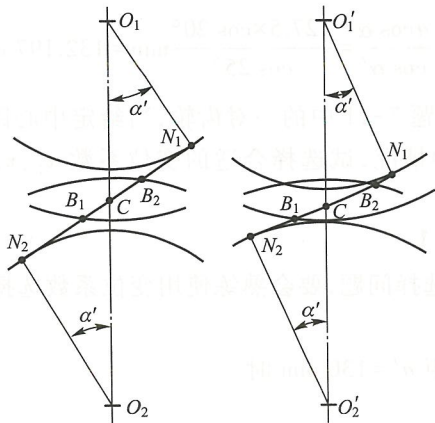


图 7-6

啮合线与两个基圆的切点 N_1 、 N_2 为极限啮合点。

啮合线与齿轮 2 齿顶圆的交点为实际啮合的开始点 B_2 , 与齿轮 1 齿顶圆的交点为实际啮合的终止点 B_1 。

啮合线与两对齿轮中心连线 O_1O_2 和 $O_1'O_2'$ 的交点为节点 C 。

分别以 $\overline{O_1C}$ 、 $\overline{O_2C}$ 、 $\overline{O_1'C}$ 、 $\overline{O_2'C}$ 为半径, 以 O_1 、 O_2 、 O_1' 、 O_2' 为圆心所作的圆分别是这四个齿轮的节圆。

节圆上的压力角 α' 就是啮合角, 如图 7-6 所示。

习题 7-11 设有一对外啮合直齿圆柱齿轮, $z_1 = 20$, $z_2 = 31$, 模数 $m = 5$ mm, 压力角 $\alpha = 20^\circ$, 齿顶高系数 $h_a^* = 1$, 试计算其标准中心距 a 。当实际中心距 $a' = 130$ mm 时, 其啮合角 α' 为多少? 当取啮合角 $\alpha' = 25^\circ$ 时, 试计算该对齿轮的实际中心距 a' 。

【解题思路及技巧】

本题是齿轮啮合传动问题,考核以下概念:标准中心距、实际中心距及啮合角。

【解题过程】

(1) 计算标准中心距

$$a = \frac{m}{2}(z_1 + z_2) = \frac{5}{2} \times (20 + 31) \text{ mm} = 127.5 \text{ mm}$$

(2) 当实际中心距 $a' = 130 \text{ mm}$ 时求啮合角 α'

由于 $a \cos \alpha = a' \cos \alpha'$, 则

$$\alpha' = \arccos \frac{a \cos \alpha}{a'} = \arccos \frac{127.5 \times \cos 20^\circ}{130} = 22.836^\circ$$

(3) 当 $\alpha' = 25^\circ$ 时, 实际中心距为

$$a' = \frac{a \cos \alpha}{\cos \alpha'} = \frac{127.5 \times \cos 20^\circ}{\cos 25^\circ} \text{ mm} = 132.197 \text{ mm}$$

习题 7-12 对习题 7-11 中的一对齿轮, 当给定中心距 $a' = 130 \text{ mm}$ 和给定啮合角 $\alpha' = 25^\circ$ 的两种情况, 试选择合适的变位系数 x_1, x_2 , 以满足这两种传动要求。

【解题思路及技巧】

本题是变位系数选择问题, 要会熟练使用变位系数选择线图。

【解题过程】

(1) 当给定中心距 $a' = 130 \text{ mm}$ 时

1) 计算啮合角 α'

$$\cos \alpha' = \frac{a}{a'} \cos \alpha = \frac{m(z_1 + z_2)}{2a'} \cos 20^\circ = 0.921\ 621\ 6$$

$$\alpha' = 22.835\ 688^\circ$$

2) 求变位系数和 $x_\Sigma = x_1 + x_2$

根据无侧隙啮合方程

$$\text{inv } \alpha' = \text{inv } \alpha + \frac{2(x_1 + x_2)}{z_1 + z_2} \tan \alpha$$

$$x_\Sigma = x_1 + x_2 = \frac{z_1 + z_2}{2 \tan \alpha} (\text{inv } \alpha' - \text{inv } \alpha) = 0.534\ 7$$

3) 查“变位系数选择线图”

“变位系数选择线图”的纵坐标是 x_Σ , 横坐标是 z_Σ , 线图右侧的刻度表示啮合角。

如图 7-7 所示, 根据啮合角 $\alpha' = 22^\circ 50' 8''$ ($\alpha' = 22.835\ 688^\circ$), 过坐标原点 O 作射线 $O-\alpha$ 交于线图右侧刻度的 $22^\circ 50' 8''$ 处。

过横坐标 $z_\Sigma = 20 + 31 = 51$ 点作垂线与射线 $O-\alpha$ 交于点 B_1 。

根据 $u = z_2/z_1 = 31/20 = 1.55$, 过点 B_1 作水平线交线图左部斜线②于点 C_1 。

过点 C_1 作垂线交于横坐标轴 $x_1 = 0.32$ 处。

由于

$$x_5 = x_1 + x_2 = 0.5347$$

$$x_2 = x_{\Sigma} - x_1 = 0.5347 - 0.32 = 0.2147$$

(2) 当给定啮合角 $\alpha' = 25^\circ$ 时

1) 求变位系数和 $x_{\Sigma} = x_1 + x_2$

根据无侧隙啮合方程

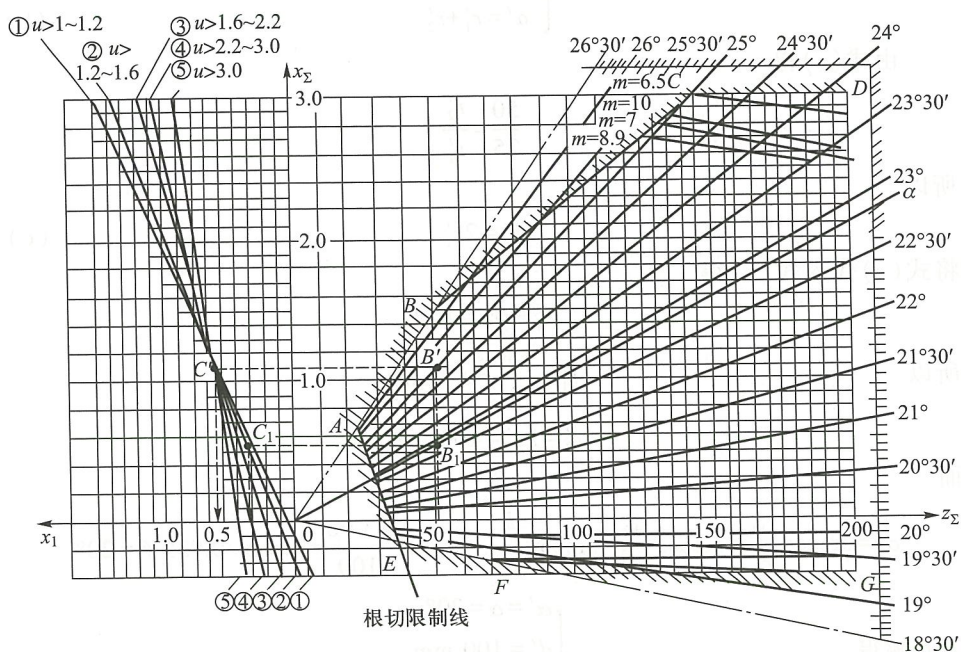
$$\text{inv } \alpha' = \text{inv } \alpha + \frac{2(x_1 + x_2)}{z_1 + z_2} \tan \alpha$$

$$x_{\Sigma} = x_1 + x_2 = \frac{z_1 + z_2}{2 \tan \alpha} (\text{inv } \alpha' - \text{inv } \alpha)$$

$$= \frac{20+31}{2 \tan 20^\circ} \times \left[\left(\tan 25^\circ - \frac{25^\circ}{180^\circ} \times \pi \right) - \left(\tan 20^\circ - \frac{20^\circ}{180^\circ} \times \pi \right) \right] = 1.055 \ 88$$

2) 查“变位系数选择线图”

如图 7-7 所示,根据啮合角 $\alpha' = 25^\circ$,过横坐标 $z_\Sigma = 20 + 31 = 51$ 点作垂线,与线图上的啮合角 $\alpha' = 25^\circ$ 的斜线交于点 B' 。

图 7-7 变位系数选择线图 ($\alpha = 20^\circ, h_a^* = 1$)

根据 $u = z_2/z_1 = 31/20 = 1.55$, 过点 B' 作水平线交线图左部斜线②于点 C' 。

过点 C' 作垂线交于横坐标轴 $x_1 = 0.54$ 处。

由于

$$x_{\Sigma} = x_1 + x_2 = 1.055\ 88$$

所以

$$x_2 = x_{\Sigma} - x_1 = 1.055\ 88 - 0.54 = 0.515\ 88$$

习题 7-13 一对外啮合齿轮 $m = 4\ \text{mm}$, $z_1 = 25$, $z_2 = 50$, 基圆直径分别为 $d_{b1} = 93.96\ \text{mm}$, $d_{b2} = 187.92\ \text{mm}$, 如果齿轮安装中心距 $a' = 150\ \text{mm}$, 啮合角 α' 为多大? 节圆直径 d'_1 和 d'_2 为多大? 若 $a' = 154\ \text{mm}$, 则 α' 、 d'_1 、 d'_2 又分别为多大?

【解题思路及技巧】

本题是非标准安装时齿轮相关尺寸计算问题。非标准安装时, 节圆与分度圆不重合, 啮合角不等于分度圆压力角。

【解题过程】

当安装中心距 $a' = 150\ \text{mm}$ 时,

$$\begin{cases} i_{12} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{r'_2}{r'_1} & (a) \\ a' = r'_1 + r'_2 & (b) \end{cases}$$

由式(a)得

$$\frac{50}{25} = \frac{r'_2}{r'_1}$$

所以

$$r'_2 = 2r'_1 \quad (c)$$

将式(c)代入式(b)得

$$r'_1 + 2r'_1 = 150$$

所以

$$r'_1 = \frac{150}{3} = 50\ \text{mm}$$

$$r'_2 = 2r'_1 = 100\ \text{mm}$$

而

$$\alpha' = \arccos \frac{r_{b1}}{r'_1} = \arccos \frac{r_{b2}}{r'_2} = \arccos \frac{d_{b1}}{d'_1} = \arccos \frac{93.96}{100} = \arccos 0.939\ 6 = 20^\circ$$

因此解得

$$\begin{cases} \alpha' = \alpha = 20^\circ \\ d'_1 = 100\ \text{mm} \\ d'_2 = 200\ \text{mm} \end{cases}$$

以上是一般解法。如果注意到： $a = \frac{m}{2}(z_1 + z_2) = \frac{4}{2}(25 + 50) = 150 \text{ mm} = a'$

可直接得到

$$\begin{cases} \alpha' = \alpha = 20^\circ \\ d'_1 = d_1 = mz_1 = 100 \text{ mm} \\ d'_2 = d_2 = mz_2 = 200 \text{ mm} \end{cases}$$

当安装中心距 $a' = 154 \text{ mm}$ 时,

与解 1 同理可得

$$r'_1 = \frac{a'}{3} = \frac{154}{3} = 51.33 \text{ mm}$$

$$r'_2 = 2r'_1 = 102.67 \text{ mm}$$

而

$$\alpha' = \arccos \frac{d_{b1}}{d'_1} = \arccos \frac{93.96}{102.67} = \arccos 0.9152 = 23^\circ 46'$$

因此解得

$$\begin{cases} \alpha' = 23^\circ 46' \\ d'_1 = 102.67 \text{ mm} \\ d'_2 = 205.34 \text{ mm} \end{cases}$$

习题 7-14 在图 7-8 所示的回归轮系中, 已知 $z_1 = 15$, $z_2 = 53$, $m_{12} = 2 \text{ mm}$; $z_3 = 21$, $z_4 = 32$, $m_{34} = 2.5 \text{ mm}$, 各齿轮的压力角均为 20° 。试问: 这两对齿轮能否均用标准齿轮传动? 若用变位齿轮传动, 可能有几种传动方案? 用哪一种方案比较好?

【解题思路及技巧】

本题是有关渐开线齿轮传动类型的问题, 对于标准齿轮传动, $x_\Sigma = x_1 = x_2 = 0$; 对于高度变位齿轮传动, $x_\Sigma = x_1 + x_2 = 0$, $x_1 = -x_2$; 对于角度变位齿轮传动 $x_\Sigma = x_1 + x_2 \neq 0$, 当 $x_\Sigma = x_1 + x_2 > 0$ 时为正传动, 当 $x_\Sigma = x_1 + x_2 < 0$ 时为负传动。

【解题过程】

当两对齿轮都采用标准传动时, 齿轮 1 和齿轮 2 的标准中心距

$$a_{12} = \frac{m_{12}}{2}(z_1 + z_2) = \frac{2}{2} \times (15 + 53) \text{ mm} = 68 \text{ mm}$$

齿轮 3 和齿轮 4 的标准中心距

$$a_{34} = \frac{m_{34}}{2}(z_3 + z_4) = \frac{2.5}{2} \times (21 + 32) \text{ mm} = 66.25 \text{ mm}$$

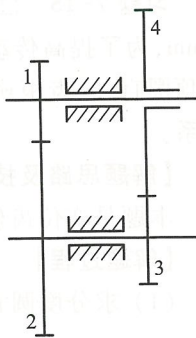


图 7-8

由于回归轮系中要求这两对齿轮的中心距相等,因此不能用标准齿轮传动,必须用变位齿轮传动。变位齿轮传动的可能方案有以下几种:

(1) 高度变位齿轮传动($x_{\Sigma}=x_1+x_2=0, x_1=-x_2$)

高度变位齿轮传动不影响齿轮传动的中心距,即 $a=a'$,因此,在回归轮系中的这两对齿轮传动不能全部采用高度变位齿轮传动,但可以用在齿轮1与齿轮2的传动中。因为,齿轮1的齿数 $z_1=15$,小于不根切最小齿数 $z_{\min}=17$,可以使 $x_1>0$,避免齿轮1根切,以改善传动条件。

(2) 角度变位齿轮传动($x_{\Sigma}=x_1+x_2\neq 0$)

1) 正传动

$x_{\Sigma}=x_1+x_2>0, a'>a$,可提高承载能力。

2) 负传动

$x_{\Sigma}=x_1+x_2<0, a'<a$,承载能力有所下降。

在本题的回归轮系中齿轮1与齿轮2的传动采用高度变位齿轮传动,使其中心距保持 $a'_{12}=a_{12}=68\text{ mm}$ 不变,同时又改善了传动条件。

齿轮3与齿轮4的传动采用角度变位齿轮传动中的正传动,使其传动的实际中心距 $a'_{34}=a_{12}$,同时又使其承载能力较标准齿轮传动有所提高。

习题 7-15 已知一对正常齿制外啮合圆柱齿轮传动, $z_1=19, z_2=100, m=2\text{ mm}$,为了提高传动性能而采用变位齿轮时,若取 $x_1=1.0, x_2=-1.6$,该二齿轮的齿顶圆直径、齿根圆直径和分度圆直径各为多少?试画图分析这三者之间的关系。

【解题思路及技巧】

本题是变位齿轮的尺寸计算问题。

【解题过程】

(1) 求分度圆直径

$$d_1 = mz_1 = 19 \times 2\text{ mm} = 38\text{ mm}$$

$$d_2 = mz_2 = 100 \times 2\text{ mm} = 200\text{ mm}$$

(2) 求齿根圆直径

$$d_{f1} = d_1 - (h_a^* - x_1)m = 38\text{ mm} - (1 - 1) \times 2\text{ mm} = 38\text{ mm}$$

$$d_{f2} = d_2 - (h_a^* - x_2)m = 200\text{ mm} - (1 + 1.6) \times 2\text{ mm} = 194.8\text{ mm}$$

(3) 求齿顶圆直径

根据无侧隙啮合方程求啮合角:

$$\begin{aligned}\operatorname{inv} \alpha' &= \operatorname{inv} \alpha + \frac{2(x_1 + x_2)}{z_1 + z_2} \tan \alpha \\ &= \tan 20^\circ - \frac{20^\circ \times \pi}{180^\circ} + \frac{2 \times (1.0 - 1.6)}{19 + 100} \tan 20^\circ = 0.011\,234\end{aligned}$$

查渐开线函数表得(或者解超越方程 $\tan \alpha' - \alpha' = 0.011\,234$ 得到更精确的结果)

$$\alpha' = 51'$$

中心距变动系数为

$$y = \frac{1}{2}(z_1 + z_2) \left(\frac{\cos \alpha}{\cos \alpha'} - 1 \right) = \frac{1}{2} \times (19 + 100) \times \left(\frac{\cos 20^\circ}{\cos 51'} - 1 \right) = -3.582$$

齿高变动系数为

$$\Delta y = x_{\Sigma} - y = 1.0 - 1.6 + 3.582 = 2.982$$

齿顶高为

$$h_{a1} = (h_a^* + x_1 - \Delta y)m = (1 + 1.0 - 2.982) \times 2 \text{ mm} = -1.964 \text{ mm}$$

$$h_{a2} = (h_a^* + x_2 - \Delta y)m = (1 - 1.6 - 2.982) \times 2 \text{ mm} = -7.164 \text{ mm}$$

齿顶圆直径为

$$d_{a1} = d_1 + 2h_{a1} = 38 \text{ mm} - 2 \times 1.964 \text{ mm} = 34.072 \text{ mm}$$

$$d_{a2} = d_2 + 2h_{a2} = 200 \text{ mm} - 2 \times 7.164 \text{ mm} = 185.672 \text{ mm}$$

(作图省略)

比较两个齿轮的齿顶圆和齿根圆直径,就会发现齿顶圆的直径小于齿根圆直径,很显然,这样的齿轮是不可能存在的。这也就是说,这两个齿轮的变位系数选取得不合理。

习题 7-16 已知一对外啮合变位圆柱齿轮, $z_1 = 15$, $z_2 = 42$, 若取 $x_1 = +1.0$, $x_2 = -1.0$, $m = 2 \text{ mm}$, $h_a^* = 1$, $c^* = 0.25$, $\alpha = 20^\circ$, 试计算该对齿轮传动的中心距 a' , 啮合角 α' , 齿顶圆直径 d_{a1} 、 d_{a2} , 齿顶厚 s_{a1} 、 s_{a2} , 并判断该对齿轮能否正常啮合传动,为什么?

【解题思路及技巧】

本题是变位齿轮的尺寸计算问题,需记住公式。

【解题过程】

(1) 求中心距和啮合角

由于 $x_1 + x_2 = 0$, 所以,这是一对高度变位齿轮传动,其啮合角

$$\alpha' = \alpha = 20^\circ$$

其中心距

$$a' = a = \frac{m(z_1 + z_2)}{2} = \frac{2 \times (15 + 42)}{2} \text{ mm} = 57 \text{ mm}$$

(2) 计算齿顶圆直径

$$h_{a1} = m(h_a^* + x_1) = 2 \text{ mm} \times (1 + 1) = 4 \text{ mm}$$

$$h_{a2} = m(h_a^* + x_2) = 2 \text{ mm} \times (1 - 1) = 0 \text{ mm}$$

$$d_{a1} = mz_1 + 2h_{a1} = 2 \text{ mm} \times 15 + 2 \times 4 \text{ mm} = 38 \text{ mm}$$

$$d_{a2} = mz_2 + 2h_{a2} = 2 \text{ mm} \times 42 + 0 \text{ mm} = 84 \text{ mm}$$

(3) 计算齿顶厚

齿轮的基圆直径为

$$d_{b1} = d_1 \cos \alpha = mz_1 \cos \alpha = 2 \text{ mm} \times 15 \times \cos 20^\circ = 28.191 \text{ mm}$$

$$d_{b2} = d_2 \cos \alpha = mz_2 \cos \alpha = 2 \text{ mm} \times 42 \times \cos 20^\circ = 78.934 \text{ mm}$$

齿顶圆压力角为

$$\cos \alpha_{a1} = \frac{d_{b1}}{d_{a1}} = \frac{28.191}{38} = 0.742$$

$$\alpha_{a1} = \arccos 0.742 = 42.109^\circ$$

$$\cos \alpha_{a2} = \frac{d_{b2}}{d_{a2}} = \frac{78.934}{84} = 0.9397$$

$$\alpha_{a2} = \arccos 0.9397 = 20^\circ$$

分度圆齿厚为

$$s_1 = m \left(\frac{\pi}{2} + 2x_1 \tan \alpha \right) = 2 \text{ mm} \times \left(\frac{\pi}{2} + 2 \times 1 \times \tan 20^\circ \right) = 4.597 \text{ mm}$$

$$s_2 = m \left(\frac{\pi}{2} + 2x_2 \tan \alpha \right) = 2 \text{ mm} \times \left(\frac{\pi}{2} - 2 \times 1 \times \tan 20^\circ \right) = 1.686 \text{ mm}$$

分度圆直径为

$$d_1 = mz_1 = 2 \text{ mm} \times 15 = 30 \text{ mm}$$

$$d_2 = mz_2 = 2 \text{ mm} \times 42 = 84 \text{ mm}$$

齿顶厚为

$$\begin{aligned}
 s_{a1} &= s_1 \frac{d_{a1}}{d_1} - d_{a1} (\operatorname{inv} \alpha_{a1} - \operatorname{inv} \alpha) \\
 &= 4.597 \times \frac{38}{30} \text{ mm} - 38 \times (\operatorname{inv} 42.109^\circ - \operatorname{inv} 20^\circ) \text{ mm} = -0.0295 \text{ mm}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 s_{a2} &= s_2 \frac{d_{a2}}{d_2} - d_{a2} (\operatorname{inv} \alpha_{a2} - \operatorname{inv} \alpha) \\
 &= 1.686 \times \frac{84}{84} \text{ mm} - 84 \times (\operatorname{inv} 20^\circ - \operatorname{inv} 20^\circ) \text{ mm} = 1.686 \text{ mm}
 \end{aligned}$$

该对齿轮不能正常啮合, 齿轮 1 的齿顶厚为负值。齿顶厚为负值, 意味着齿顶是尖的, 并且实际齿顶高比计算的齿顶高要小。当变位系数过大时就会出现这种情况。

习题 7-17 已知一正常齿制的标准外啮合齿轮传动, 参数为 $\alpha = 20^\circ$, $m = 5 \text{ mm}$, $z_1 = 19$, $z_2 = 42$ 。

(1) 试求重合度 ε , 并绘出单齿及双齿的啮合区;

(2) 将中心距 a 增大, 直到刚好连续传动。求: 1) 啮合角 α' ; 2) 两齿轮的节圆直径; 3) 两齿轮分度圆间的距离; 4) 顶隙和侧隙。

【解题过程】

(1)

$$r_1 = \frac{1}{2} m z_1 = \frac{1}{2} \times 5 \times 19 = 47.5 \text{ mm}$$

$$r_2 = \frac{1}{2} m z_2 = \frac{1}{2} \times 5 \times 42 = 105 \text{ mm}$$

$$h_a = h_a^* \cdot m = 1 \times 5 = 5 \text{ mm}$$

$$h_f = (h_a^* + c^*) m = (1 + 0.25) \times 5 = 6.25 \text{ mm}$$

$$r_{a1} = r_1 + h_a = 47.5 + 5 = 52.5 \text{ mm}$$

$$r_{a2} = r_2 + h_a = 105 + 5 = 110 \text{ mm}$$

$$r_{b1} = r_1 \cos \alpha = 47.5 \times 0.9397 = 44.635 \text{ mm}$$

$$r_{b2} = r_2 \cos \alpha = 105 \times 0.9397 = 98.668 \text{ mm}$$

$$\alpha_{a1} = \arccos \frac{r_{b1}}{r_{a1}} = \arccos \frac{44.635}{52.5} = \arccos 0.8502 = 31.767^\circ$$

$$\alpha_{a2} = \arccos \frac{r_{b2}}{r_{a2}} = \arccos \frac{98.668}{110} = \arccos 0.8970 = 26.234^\circ$$

$$\begin{aligned}
 \varepsilon &= \frac{1}{2\pi} [z_1(\tan \alpha_{a1} - \tan \alpha) + z_2(\tan \alpha_{a2} - \tan \alpha)] \\
 &= \frac{1}{2\pi} [19 \times (\tan 31.767^\circ - \tan 20^\circ) + 42 \times (\tan 26.234^\circ - \tan 20^\circ)] \\
 &= \frac{1}{2\pi} [19 \times (0.6192 - 0.3640) + 42 \times (0.4928 - 0.3640)] = 1.63
 \end{aligned}$$

该传动的单齿及双齿啮合区如图 7-9 所示。

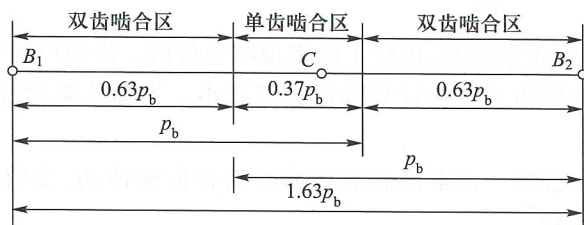


图 7-9

(2)

1) 求啮合角 α'

当中心距 a' 增大直至刚好连续传动时,重合度 $\varepsilon = 1$ 。

因
$$\frac{1}{2\pi} [z_1(\tan \alpha_{a1} - \tan \alpha') + z_2(\tan \alpha_{a2} - \tan \alpha')] = 1$$

所以

$$\tan \alpha' = \frac{z_1 \tan \alpha_{a1} + z_2 \tan \alpha_{a2} - 2\pi}{z_1 + z_2}$$

$$\begin{aligned}
 \alpha' &= \arctan \left(\frac{z_1 \tan \alpha_{a1} + z_2 \tan \alpha_{a2} - 2\pi}{z_1 + z_2} \right) = \arctan \left(\frac{z_1 \tan 31.767^\circ + z_2 \tan 26.234^\circ - 2\pi}{z_1 + z_2} \right) \\
 &= \arctan \left(\frac{19 \times 0.6192 + 42 \times 0.4928 - 2\pi}{19 + 42} \right) = \arctan 0.4329 = 23.4^\circ
 \end{aligned}$$

2) 求两齿轮的节圆直径 d'_1 、 d'_2

刚好连续传动时,两齿轮的节圆直径为

$$d'_1 = \frac{d_1 \cos \alpha}{\cos 23.4^\circ} = \frac{95 \times 0.9397}{0.9178} \text{ mm} = 97.27 \text{ mm}$$

$$d'_2 = \frac{d_2 \cos \alpha}{\cos 23.4^\circ} = \frac{210 \times 0.9397}{0.9178} \text{ mm} = 215.01 \text{ mm}$$

3) 求两齿轮的分度圆分离距离

$$a' = \frac{d'_1 + d'_2}{2} = \frac{97.27 + 215.01}{2} \text{ mm} = 156.14 \text{ mm}$$

$$a = \frac{d_1 + d_2}{2} = \frac{95 + 210}{2} \text{ mm} = 152.5 \text{ mm}$$

两分度圆分离的距离为

$$ym = a' - a = (156.14 - 152.5) \text{ mm} = 3.64 \text{ mm}$$

4) 求顶隙和侧隙

$$\text{顶隙} = a' - r_{a2} - r_{f1} = (156.14 - 110 - 41.25) \text{ mm} = 4.89 \text{ mm}$$

因

$$s_2 = \frac{\pi m}{2} = \frac{\pi \times 5}{2} \text{ mm} = 7.854 \text{ mm}$$

$$r'_2 = \frac{d'_2}{2} = \frac{215.01}{2} \text{ mm} = 107.505 \text{ mm}$$

$$r_2 = \frac{d_2}{2} = \frac{210}{2} \text{ mm} = 105 \text{ mm}$$

$$d'_2 = 2r'_2 = 215.01 \text{ mm}$$

$$\alpha' = 23.4^\circ$$

$$\alpha = 20^\circ$$

所以

$$\begin{aligned} s'_2 &= s_2 \frac{r'_2}{r_2} - 2r'_2 (\text{inv } \alpha' - \text{inv } \alpha) = \left[7.854 \times \frac{107.505}{105} - 215.01 \times (\text{inv } 23.4^\circ - \text{inv } 20^\circ) \right] \text{ mm} \\ &= \left[7.854 \times \frac{107.505}{105} - 215.01 \times (0.024\,332 - 0.014\,904) \right] \text{ mm} = 6.014 \text{ mm} \end{aligned}$$

因

$$p'_1 = \frac{\pi d'_1}{z_1} = \frac{\pi \times 97.27}{19} \text{ mm} = 16.083 \text{ mm}$$

$$s_1 = \frac{\pi m}{2} = \frac{\pi \times 5}{2} \text{ mm} = 7.854 \text{ mm}$$

$$r'_1 = \frac{d'_1}{2} = \frac{97.27}{2} \text{ mm} = 48.635 \text{ mm}$$

$$r_1 = \frac{d_1}{2} = \frac{95}{2} \text{ mm} = 47.5 \text{ mm}$$

$$d'_1 = 2r'_1 = 97.27 \text{ mm}$$

所以

$$\begin{aligned} s'_1 &= s_1 \frac{r'_1}{r_1} - 2r'_1 (\text{inv } \alpha' - \text{inv } \alpha) = \left[7.854 \times \frac{48.635}{47.5} - 97.27 (\text{inv } 23.4^\circ - \text{inv } 20^\circ) \right] \text{ mm} \\ &= \left[7.854 \times \frac{48.635}{47.5} - 97.27 (0.023\,791 - 0.014\,904) \right] \text{ mm} = 7.124\,6 \text{ mm} \end{aligned}$$

$$\text{因 } e'_1 = p'_1 - s'_1 = (16.083 - 7.124\,6) \text{ mm} = 8.958\,4 \text{ mm}$$

$$\text{所以 侧隙} = e'_1 - s'_2 = (8.958\,4 - 6.014) \text{ mm} = 2.944\,4 \text{ mm}$$

习题 7-18 设有一对平行轴外啮合圆柱齿轮传动, $z_1 = 18, z_2 = 35, m = 2 \text{ mm}$, 中心距 $a = 54 \text{ mm}$ 。若不用变位直齿轮而用斜齿圆柱齿轮来配凑此中心距, 其螺旋角 β 应为多少?

【解题思路及技巧】

本题是斜齿圆柱齿轮的尺寸计算问题, 需记住公式。

【解题过程】

根据斜齿轮传动中心距计算公式

$$\begin{aligned} a &= \frac{d_1 + d_2}{2} = \frac{m_1(z_1 + z_2)}{2} = \frac{m_n(z_1 + z_2)}{2 \cos \beta} \\ \cos \beta &= \frac{m_n(z_1 + z_2)}{2a} = \frac{2 \times (18 + 35)}{2 \times 54} = 0.981\,5 \end{aligned}$$

则齿轮的螺旋角为 $\beta = 11.044^\circ$ 。

习题 7-19 设一对斜齿圆柱齿轮, $z_1 = 20, z_2 = 41, m = 4 \text{ mm}, \alpha = 20^\circ$, 若取其螺旋角 $\beta = 15^\circ$, 在求得中心距 a 进行圆整后再确定螺旋角 β 。试:

- (1) 求该对斜齿轮分度圆及齿顶圆直径。
- (2) 若齿宽 $B = 30 \text{ mm}$, 试计算其端面重合度 ε_α 、轴向重合度 ε_β 和总重合度 ε_γ 。
- (3) 求当量齿数 z_{v1}, z_{v2} , 并决定加工时的铣刀号数。

【解题思路及技巧】

本题是斜齿圆柱齿轮的啮合传动计算问题, 需记住公式。

【解题过程】

(1) 求斜齿轮的螺旋角

当螺旋角 $\beta = 15^\circ$ 时, 中心距为

$$a = \frac{(z_1 + z_2) m_n}{2 \cos \beta} = \frac{(20 + 41) \times 4}{2 \cos 15^\circ} \text{ mm} = 126.304 \text{ mm}$$

圆整中心距, $a = 126 \text{ mm}$ 。

此时螺旋角为

$$\cos \beta = \frac{(z_1 + z_2) m_n}{2a} = \frac{(20 + 41) \times 4}{2 \times 126} = 0.968 \ 254$$

$$\beta = 14.475 \ 648^\circ$$

(2) 求分度圆直径和齿顶圆直径

$$d_1 = \frac{m_n z_1}{\cos \beta} = \frac{4 \times 20}{\cos 14.475 \ 648^\circ} \text{ mm} = 82.623 \text{ mm}$$

$$d_2 = \frac{m_n z_2}{\cos \beta} = \frac{4 \times 41}{\cos 14.475 \ 648^\circ} \text{ mm} = 169.377 \text{ mm}$$

$$d_{a1} = d_1 + 2m_n h_{an}^* = 82.623 \text{ mm} + 2 \times 4 \text{ mm} \times 1 = 90.623 \text{ mm}$$

$$d_{a2} = d_2 + 2m_n h_{an}^* = 169.377 \text{ mm} + 2 \times 4 \text{ mm} \times 1 = 177.377 \text{ mm}$$

(3) 计算重合度

端面重合度

$$\varepsilon_\alpha = \frac{1}{2\pi} [z_1 (\tan \alpha_{at1} - \tan \alpha'_i) + z_2 (\tan \alpha_{at2} - \tan \alpha'_i)]$$

端面啮合角

$$\tan \alpha'_i = \frac{\tan \alpha'_n}{\cos \beta} = \frac{\tan 20^\circ}{\cos 14.475 \ 648^\circ} = 0.375 \ 904$$

$$\alpha'_i = 20.601 \ 43^\circ$$

齿顶圆的端面压力角

$$\cos \alpha_{at1} = \frac{d_1 \cos \alpha_i}{d_{a1}} = \frac{82.623 \times \cos 20.601 \ 43^\circ}{90.623} = 0.853 \ 4$$

$$\alpha_{at1} = 31.415^\circ$$

$$\cos \alpha_{at2} = \frac{d_2 \cos \alpha_i}{d_{a2}} = \frac{169.377 \times \cos 20.601 \ 43^\circ}{177.377} = 0.893 \ 8$$

$$\alpha_{at2} = 26.641^\circ$$

$$\varepsilon_\alpha = \frac{1}{2\pi} [20 \times (\tan 31.415^\circ - \tan 20.601^\circ) + 41 \times (\tan 26.641^\circ - \tan 20.601^\circ)] = 1.568$$

轴的重合度

$$\varepsilon_\beta = \frac{B \sin \beta}{\pi m_n} = \frac{30 \times \sin 14.476^\circ}{4\pi} = 0.597$$

总重合度

$$\varepsilon_\gamma = \varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta = 1.568 + 0.597 = 2.165$$

(4) 求当量齿数并选择加工时的铣刀号数

$$z_{v1} = \frac{z_1}{\cos^3 \beta} = \frac{20}{\cos^3 14.476^\circ} = 22.03$$

$$z_{v2} = \frac{z_2}{\cos^3 \beta} = \frac{41}{\cos^3 14.476^\circ} = 45.17$$

加工小齿轮时,用4[#]铣刀;加工大齿轮时,用6[#]铣刀。

习题 7-20 图 7-10 所示的机构中,已知各直齿圆柱齿轮模数均为 2 mm, $z_1 = 15$, $z_2 = 32$, $z'_2 = 20$, $z_3 = 30$, 要求齿轮 1、3 同轴线。试问:

(1) 齿轮 1、2 和齿轮 2'、3 应选择什么传动类型最好? 为什么?

(2) 若齿轮 1、2 改为斜齿轮传动来凑中心距,当齿数不变,模数不变时,斜齿轮的螺旋角为多少?

(3) 当用展成法(如滚刀)来加工齿数 $z_1 = 15$ 的斜齿轮 1 时,是否会产生根切?

(4) 这两个齿轮的当量齿数是多少?

【解题思路及技巧】

判别斜齿轮是否发生根切有两种方法:一是从斜齿轮的端面齿形考虑,因其与直齿轮一样,故可直接利用直齿轮不发生根切最小齿数公式[推导过程见本题第(3)问]来计算。这一公式是根据齿条型刀具展成加工齿轮推导的。二是从斜齿轮的法面齿形考虑,因斜齿轮的法面齿形是用其当量齿轮的齿形代替的,且当量齿轮为直齿轮,故可按其当量齿数来直接进行判别。

【解题过程】

(1) 齿轮 1、2 和齿轮 2'、3 的传动中心距分别为:

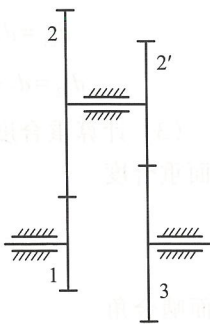


图 7-10

$$a_{12} = m(z_1 + z_2)/2 = 2 \times (15 + 32)/2 \text{ mm} = 47 \text{ mm}$$

$$a_{2'3} = m(z_2' + z_3)/2 = 2 \times (20 + 30)/2 \text{ mm} = 50 \text{ mm}$$

根据其中心距,选齿轮 2'、3 为标准齿轮传动,而齿轮 1、2 为正变位齿轮传动。实际中心距为 $a_{2'3} = 50 \text{ mm}$,此方案为最佳。因为,齿轮 2'、3 的中心距较大,选其为标准齿轮传动,使该齿轮传动设计、加工简单,互换性好,同时也避免了齿轮 1、2 采用负变位齿轮传动不利的情况。齿轮 1、2 采用正变位齿轮传动,一方面可避免齿轮发生根切(齿轮 1 的齿数 $z_1 = 15 < 17$,故必须采用正变位齿轮);另一方面齿轮的弯曲强度及接触强度都有所提高。

(2) 齿轮 1、2 改为斜齿轮传动时,由题意要求:两齿轮齿数不变,模数不变,即 $m_n = m = 2 \text{ mm}$,其中心距为

$$a = m_n(z_1 + z_2)/(2 \cos \beta) = 2 \times (15 + 32)/(2 \cos \beta) \text{ mm} = a_{2'3} = 50 \text{ mm}$$

$$\text{则} \quad \cos \beta = 0.94$$

$$\text{解得} \quad \beta = 19.948^\circ$$

(3) 用展成法加工斜齿轮不发生根切的最小齿数为

$$z_{\min} = 2h_{\text{an}}^* \cos \beta / \sin^2 \alpha_t$$

而 α_t 可由式 $\tan \alpha_n = \tan \alpha_t \cos \beta$ 求得

$$\alpha_t = \arctan(\tan \alpha_n / \cos \beta) = \arctan(\tan 20^\circ / \cos 19.948^\circ) = 21.167^\circ$$

$$z_{\min} = 2h_{\text{an}}^* \cos \beta / \sin^2 \alpha_t = 2 \times 1 \times \cos 19.948^\circ / (\sin 21.167^\circ)^2 = 14.419$$

因 $z_1 = 15 > z_{\min}$,故用展成法滚刀加工此斜齿轮时不会发生根切。

(4) 两个齿轮的当量齿数分别为

$$z_{v1} = z_1 / \cos^3 \beta = 15 / (\cos 19.948^\circ)^3 = 18.06$$

$$z_{v2} = z_2 / \cos^3 \beta = 32 / (\cos 19.948^\circ)^3 = 38.53$$

本题通过两种方法判断斜齿轮是否发生根切:一是从斜齿轮的端面齿形考虑,按第(3)问推导的不发生根切最小齿数公式 $z_{\min} = 2h_{\text{an}}^* \cos \beta / \sin^2 \alpha_t$ 来判断。对于本题, $z_{\min} = 14.419$,而 $z_1 = 15, z_1 > z_{\min}$,所以齿轮 1 不会发生根切。二是从斜齿轮的法面齿形考虑,按其当量齿数来直接进行判别,即 $z_{v1} = 18.06 > 17$ (正常齿制直齿轮的最小不根切齿数为 17),所以齿轮 1 不会发生根。

习题 7-21 一对交错轴斜齿轮传动,已知轴交错角 $\Sigma = 90^\circ, \beta_1 = 30^\circ, i_{12} = 2, z_1 = 35$,法向齿距 $p_n = 12.56 \text{ mm}$ 。试求其中心距 a 。

【解题思路及技巧】

本题是交错轴斜齿圆柱齿轮传动尺寸计算问题,需记住公式。

【解题过程】

(1) 求齿轮 2 的齿数

$$i_{12} = \frac{z_2}{z_1} = 2$$

$$z_2 = i_{12} z_1 = 2 \times 35 = 70$$

(2) 法向模数

根据法向模数的定义

$$m_n = \frac{p_n}{\pi} = \frac{12.56}{\pi} \text{ mm} = 4 \text{ mm}$$

(3) 求齿轮 1 的分度圆直径

$$d_1 = \frac{m_n z_1}{\cos \beta_1} = \frac{4 \times 35}{\cos 30^\circ} \text{ mm} = 161.658 \text{ mm}$$

(4) 求齿轮 2 的分度圆直径

由于轴交错角 $\Sigma = \beta_1 + \beta_2 = 90^\circ$, 所以有

$$i_{12} = \frac{d_2}{d_1} \tan \beta_1$$

$$d_2 = \frac{i_{12} d_1}{\tan \beta_1} = \frac{2 \times 161.658}{\tan 30^\circ} \text{ mm} = 560 \text{ mm}$$

(5) 求传动中心距

$$a = \frac{d_1 + d_2}{2} = \frac{161.658 + 560}{2} \text{ mm} = 360.829 \text{ mm}$$

习题 7-22 已知一蜗杆传动的参数为蜗杆头数 $z_1 = 1$, 传动比 $i_{12} = 40$, 蜗轮直径 $d_2 = 200 \text{ mm}$, 蜗杆的导程角 $\gamma = 5.71^\circ$ 。试确定模数 m 及传动中心距 a 。

【解题过程】

(1) 求蜗轮齿数

$$i_{12} = \frac{z_2}{z_1} = 40$$

$$z_2 = z_1 i_{12} = 1 \times 40 = 40$$

(2) 求模数

$$d_2 = m z_2$$

$$m = \frac{d_2}{z_2} = \frac{200}{40} \text{ mm} = 5 \text{ mm}$$

(3) 求蜗杆分度圆直径

$$d_1 = \frac{mz_1}{\tan \gamma} = \frac{5 \text{ mm} \times 1}{\tan 5.71^\circ} = 50 \text{ mm}$$

(4) 求传动中心距

$$a = \frac{d_1 + d_2}{2} = \frac{50 + 200}{2} \text{ mm} = 125 \text{ mm}$$

习题 7-23 已知一蜗杆传动,测得如下数据:蜗杆头数 $z_1 = 2$, 蜗轮齿数 $z_2 = 40$, 蜗杆轴向齿距 $p_x = 15.71 \text{ mm}$, 蜗杆顶圆直径 $d_{a1} = 60 \text{ mm}$ 。试求出模数 m 、蜗轮螺旋角 β_2 、蜗轮分度圆直径 d_2 及中心距 a 。

【解题过程】

(1) 求模数

根据蜗杆模数的定义

$$m = \frac{p_x}{\pi} = \frac{15.71}{3.14159} \text{ mm} = 5 \text{ mm}$$

(2) 求蜗杆的分度圆直径

由于

$$d_{a1} = d_1 + 2h_a^* m = 60 \text{ mm}$$

取 $h_a^* = 1$

$$d_1 = d_{a1} - 2h_a^* m = 60 \text{ mm} - 2 \times 1 \times 5 \text{ mm} = 50 \text{ mm}$$

(3) 求蜗轮螺旋角

蜗杆导程角为

$$\tan \gamma = \frac{mz_1}{d_1} = \frac{5 \times 2}{50} = 0.2$$

$$\gamma = 11.30993^\circ$$

蜗轮螺旋角为

$$\beta_2 = \gamma = 11.30993^\circ$$

(4) 求蜗轮分度圆直径

$$d_2 = mz_2 = 5 \text{ mm} \times 40 = 200 \text{ mm}$$

(5) 求蜗杆传动中心距

$$a = \frac{d_1 + d_2}{2} = \frac{50 + 200}{2} \text{ mm} = 125 \text{ mm}$$

习题 7-24 已知一对直齿锥齿轮的基本参数为 $z_1 = 15, z_2 = 30, m = 10 \text{ mm}$, $h_a^* = 1, c^* = 0.2, \Sigma = 90^\circ$ 。试计算该对直齿锥齿轮的基本尺寸,并判断小齿轮 z_1 是否会产生根切。

【解题过程】

(1) 求分度圆锥角

$$\tan \delta_1 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{15}{30} = 0.5$$

$$\delta_1 = 26.565\ 05^\circ$$

$$\delta_2 = \Sigma - \delta_1 = 90^\circ - 26.565\ 05^\circ = 63.434\ 95^\circ$$

(2) 求分度圆直径

$$d_1 = mz_1 = 10 \text{ mm} \times 15 = 150 \text{ mm}$$

$$d_2 = mz_2 = 10 \text{ mm} \times 30 = 300 \text{ mm}$$

(3) 求锥距

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{d_1^2 + d_2^2} = \frac{1}{2} \sqrt{150^2 + 300^2} \text{ mm} = 167.705 \text{ mm}$$

(4) 求齿顶高

$$h_a = h_a^* m = 1 \times 10 \text{ mm} = 10 \text{ mm}$$

(5) 求齿根高

$$h_f = (h_a^* + c^*) m = (1 + 0.2) \times 10 \text{ mm} = 12 \text{ mm}$$

(6) 求齿顶圆直径

$$d_{a1} = d_1 + 2h_a \cos \delta_1 = 150 \text{ mm} + 2 \times 10 \text{ mm} \times \cos 26.565\ 05^\circ = 167.889 \text{ mm}$$

$$d_{a2} = d_2 + 2h_a \cos \delta_2 = 300 \text{ mm} + 2 \times 10 \text{ mm} \times \cos 63.434\ 95^\circ = 308.944 \text{ mm}$$

(7) 求齿根圆直径

$$d_{f1} = d_1 - 2h_f \cos \delta_1 = 150 \text{ mm} - 2 \times 12 \text{ mm} \times \cos 26.565\ 05^\circ = 128.534 \text{ mm}$$

$$d_{f2} = d_2 - 2h_f \cos \delta_2 = 300 \text{ mm} - 2 \times 12 \text{ mm} \times \cos 63.434\ 95^\circ = 289.267 \text{ mm}$$

(8) 求齿根角

$$\theta_{f1} = \theta_{f2} = \arctan \frac{h_f}{R} = \arctan \frac{12}{167.705} = 4.092\ 78^\circ$$

(9) 求齿顶角

正常收缩齿

$$\theta_{a1} = \theta_{a2} = \arctan \frac{h_a}{R} = \arctan \frac{10}{167.705} = 3.412\ 42^\circ$$

等顶隙收缩齿

$$\theta_{a1} = \theta_{f1} = \arctan \frac{h_f}{R} = \arctan \frac{12}{167.705} = 4.092\ 78^\circ$$

$$\theta_{a2} = \theta_{f2} = \arctan \frac{h_f}{R} = \arctan \frac{12}{167.705} = 4.092\ 78^\circ$$

(10) 求齿顶锥角

正常收缩齿

$$\delta_{a1} = \delta_1 + \theta_{a1} = 26.565\ 05^\circ + 3.412\ 42^\circ = 29.977\ 47^\circ$$

$$\delta_{a2} = \delta_2 + \theta_{a2} = 63.434\ 95^\circ + 3.412\ 42^\circ = 66.847\ 37^\circ$$

等顶隙收缩齿

$$\delta_{a1} = \delta_1 + \theta_{f1} = 26.565\ 05^\circ + 4.092\ 78^\circ = 30.657\ 83^\circ$$

$$\delta_{a2} = \delta_2 + \theta_{f2} = 63.434\ 95^\circ + 4.092\ 78^\circ = 67.527\ 73^\circ$$

(11) 求齿根圆锥角

$$\delta_{f1} = \delta_1 - \theta_{f1} = 26.565\ 05^\circ - 4.092\ 78^\circ = 22.472\ 27^\circ$$

$$\delta_{f2} = \delta_2 - \theta_{f2} = 63.434\ 95^\circ - 4.092\ 78^\circ = 59.342\ 17^\circ$$

(12) 求当量齿数

$$z_{v1} = \frac{z_1}{\cos \delta_1} = \frac{15}{\cos 26.565\ 05^\circ} = 16.77$$

$$z_{v2} = \frac{z_2}{\cos \delta_2} = \frac{30}{\cos 63.434\ 95^\circ} = 67.08$$

锥齿轮的最小不根切齿数为

$$z_{vmin} = \frac{2h_a^*}{\sin^2 \alpha} = \frac{2 \times 1}{\sin^2 20^\circ} = 17.10$$

$$z_{v1} < z_{vmin}$$

此时小齿轮有微量根切。

第八章 轮系及其设计

8.1 基本要求

1. 掌握轮系的类型和功用;
2. 掌握定轴轮系、周转轮系和复合轮系传动比的计算方法;
3. 了解行星轮系传动效率的计算方法;
4. 了解行星轮系设计方法及各轮齿数和行星轮数目必须满足的条件。

8.2 重点及难点解析

8.2.1 本章重点

本章重点是掌握轮系传动比的计算方法。

1. 轮系传动比的计算

(1) 定轴轮系

该轮系中各个齿轮的轴线相对于机架的位置都是固定的,传动比是首末两轮的角速度之比,其大小等于组成该轮系的各对齿轮中所有从动轮齿数的连乘积与所有主动轮齿数的连乘积之比。设 A 表示首轮, B 表示末轮,即

$$i_{AB} = \frac{\omega_A}{\omega_B} = \frac{\text{从 A 到 B 所有从动轮齿数的连乘积}}{\text{从 A 到 B 所有主动轮齿数的连乘积}}$$

定轴轮系首末两轮的转向关系通常用画箭头的方法确定,即从给定转向的首轮开始,循着运动传递路线,逐个对每对啮合传动进行转向判断,并用画箭头的方法表示出各主、从动轮的转向,直至确定末轮的转向。对于一对圆柱齿轮传动,外啮合时两轮转向箭头方向相反,而内啮合时两轮转向箭头方向相同;对于一对锥齿轮传动,转向箭头同时指向节点或同时背向节点;对于螺旋齿轮传动和蜗轮蜗杆传动,其两轮转向可根据两轮在节点处的速度关系来判断。另外,当两轮的轴线平行时,还可以在传动比数值前加“+”号或“-”号来表示转向关系;“+”号(往往省略)表示转向相同,“-”号表示转向相反。当两轮的轴线不平行时,只能用画箭头的方法表示两轮的转向关系。

(2) 周转轮系

该轮系中至少有一个齿轮的轴线位置是绕着其他齿轮的固定轴线回转的, 其由几个中心轮、一个行星轮(包括对称结构和多联齿轮)和一个系杆组成, 中心轮和系杆称为周转轮系的基本构件。周转轮系和定轴轮系的根本区别是周转轮系中有一个既自转又公转的行星轮。

周转轮系各基本构件间的转速关系如下:

设周转轮系基本构件中两个中心轮为 A 和 K, 系杆为 H, 则其转化机构的传动比 i_{AK}^H 的计算公式为

$$i_{AK}^H = \frac{\omega_A^H}{\omega_K^H} = \frac{\omega_A - \omega_H}{\omega_K - \omega_H} = \pm \frac{\text{从 A 到 K 所有从动轮齿数的连乘积}}{\text{从 A 到 K 所有主动轮齿数的连乘积}}$$

只要给定了 ω_A 、 ω_K 和 ω_H 中的任意两个参数, 就可以用上式求出第三个参数, 或只要给定了 ω_A 、 ω_K 和 ω_H 中的任意一个参数, 就可以用上式求出另外两个参数的比值。应用上述公式时应注意:

- 1) 该式只适用于齿轮 A、K 和系杆 H 的回转轴线重合或平行的情况;
- 2) 等号右侧“ $\pm$ ”号的判定方法同定轴轮系, 即齿轮 A 和齿轮 K 在转化机构中转向相同时取“+”号, 转向相反时取“-”号。

(3) 复合轮系

该轮系中既有定轴轮系又有周转轮系或由多个周转轮系组成。其传动比既不能直接按定轴轮系的传动比来计算, 也不能直接按周转轮系的传动比来计算, 而是将复合轮系中定轴轮系部分和周转轮系部分分别计算。复合轮系传动比计算的方法及步骤为:

- 1) 分清轮系中哪些部分是定轴轮系, 哪些部分是周转轮系;
- 2) 定轴轮系部分应当按照定轴轮系传动比的方法来计算, 而周转轮系部分应当按照周转轮系传动比的方法来计算, 分别列出它们的计算式;
- 3) 根据各部分列出的计算式, 联立求解。

2. 行星轮系的设计

(1) 轮系类型的选择

轮系类型选择的主要出发点是工作所提出的功能要求和使用场合, 首先要考虑的问题是所选择的轮系能否满足工作所要求的传动比、效率等要求。

(2) 各轮齿数的确定

设计 2K-H 型行星轮系时, 各轮齿数的选配须满足以下 4 个条件:

- 1) 保证实现给定的传动比

$$z_3 = (i_{1H} - 1) z_1$$

2) 保证中心轮及系杆的轴线重合,即满足同心条件

$$z_2 = (z_3 - z_1) / 2$$

3) 保证 K 个行星轮能够均布地装入两中心轮之间,即满足安装条件

$$N = (z_3 + z_1) / K$$

4) 保证 K 个行星轮不致相互碰撞,即满足邻接条件

$$(z_1 + z_2) \sin \frac{180^\circ}{K} > z_2 + 2h_a^*$$

8.2.2 本章难点

本章难点是复合轮系传动比的计算,而复合轮系传动比计算的关键是正确划分轮系,掌握复合轮系传动比的计算方法。应注意以下几点。

(1) 必须正确分清复合轮系中定轴轮系和周转轮系部分。分清轮系的关键是把其中的周转轮系划分出来,即找到行星轮。应从复合轮系的首轮开始,循着运动传递路线,逐个对齿轮进行判断,看它是绕固定轴线位置转动,还是绕变动轴线位置转动。如果找到绕变动轴线位置转动的齿轮,即找到了行星轮。这时,带动行星轮轴线转动的构件就是系杆,与行星轮相啮合而绕固定轴线位置转动的齿轮就是中心轮。每一系杆连同系杆上的行星轮和与行星轮相啮合的中心轮就组成了一个基本结构的周转轮系。在找出复合轮系中每一个基本结构的周转轮系之后,剩下的就是定轴轮系了。

(2) 搞清楚复合轮系中各部分之间的连接关系。常用复合轮系的连接方式为:

1) 串联式复合轮系。即由定轴轮系与一个或几个基本结构的周转轮系组成,或由几个基本结构的周转轮系串联组成。其特点是前一个基本轮系的输出轴与后一个基本轮系的输入轴相固连,各部分传动比可独立计算。

2) 并联式复合轮系。即由差动轮系与一个定轴轮系或行星周转轮系组成,或由几个基本结构的周转轮系并联组成。其特点是差动轮系的两个基本构件由定轴轮系或行星轮系封闭,故称之为封闭式复合轮系。因此,各部分轮系的传动比必须联立求解。

3) 双重式复合轮系。即在一个周转轮系上又装载另一个周转轮系。其特点是具有双重系杆,至少有一个行星轮同时绕两个变动轴线位置转动。因此,其传动比的计算需要进行二次转化。

8.3 典型例题分析及解题技巧

例 8-1 如图 8-1 所示轮系, 已知各轮齿数为: $z_1 = 25, z_2 = 50, z_{2'} = 25, z_H = 100, z_4 = 50$, 各齿轮模数相同。求传动比 i_{14} 。

【解题思路及技巧】

轮系由两部分组成, 齿轮 1、2—2'、3 及系杆 H 组成行星轮系, 齿轮 H(系杆) 及齿轮 4 组成定轴轮系。

【解题过程】

利用同心条件: $z_3 = z_1 + z_2 + z_{2'} = 25 + 50 + 25 = 100$

对于齿轮 1、2—2'、3 及系杆 H 组成的行星轮系有

$$i_{1H} = \frac{n_1}{n_H} = 1 - i_{13}^H = 1 + \frac{z_2 z_3}{z_1 z_{2'}} = 1 + \frac{50 \times 100}{25 \times 25} = 9 \quad (a)$$

对于齿轮 H(系杆) 及齿轮 4 组成的定轴轮系有

$$i_{H4} = \frac{n_H}{n_4} = -\frac{z_4}{z_H} = -\frac{50}{100} = -\frac{1}{2} \quad (b)$$

由式(a)及式(b)得:

$$i_{14} = i_{1H} i_{H4} = \frac{n_1}{n_H} \frac{n_H}{n_4} = \frac{n_1}{n_4} = 9 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -4.5$$

计算结果为负, 说明齿轮 1 的转向与齿轮 4 的转向相反。

例 8-2 如图 8-2 所示轮系, 已知齿轮 1 的转速 $n_1 = 1\,650 \text{ r/min}$, 齿轮 4 的转速 $n_4 = 1\,000 \text{ r/min}$, 所有齿轮都是标准齿轮, 模数相同且 $z_2 = z_5 = z_6 = 20$ 。求轮系未知齿轮的齿数 z_1, z_3, z_4 。

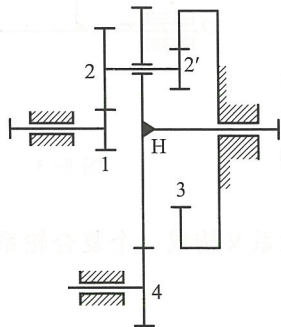


图 8-1

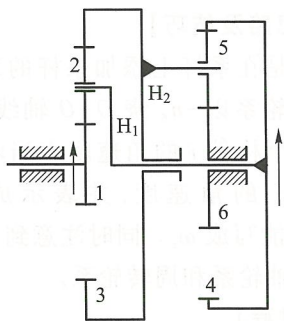


图 8-2

【解题思路及技巧】

轮系由两部分组成, 齿轮 1、2、3(H_2) 及系杆 H_1 (4) 组成差动轮系, 齿轮 6、5、4(H_1) 及系杆 H_2 (3) 组成行星轮系。

【解题过程】

利用同心条件: $z_3 = z_1 + 2z_2 = z_1 + 40$; $z_4 = z_6 + 2z_5 = 60$

对于齿轮 6、5、4(H_1) 及系杆 H_2 (3) 组成的行星轮系有

$$i_{4H_2} = \frac{n_4}{n_{H_2}} = 1 - i_{46}^{H_2} = 1 + \frac{z_6}{z_4} = 1 + \frac{20}{60} = \frac{4}{3}$$

从而: $n_3 = n_{H_2} = \frac{3}{4}n_4 = \frac{3}{4} \times 1\,000 \text{ r/min} = 750 \text{ r/min}$; $n_{H_1} = n_4 = 1\,000 \text{ r/min}$

对于齿轮 1、2、3(H_2) 及系杆 H_1 (4) 组成的差动轮系有

$$i_{13}^{H_1} = \frac{n_1 - n_{H_1}}{n_3 - n_{H_1}} = -\frac{z_3}{z_1} = -\frac{z_1 + 40}{z_1} \quad (\text{a})$$

将 $n_1 = 1\,650 \text{ r/min}$, $n_{H_1} = 1\,000 \text{ r/min}$, $n_3 = 750 \text{ r/min}$ 代入式(a)得:

$$\frac{1\,650 - 1\,000}{750 - 1\,000} = -\frac{z_1 + 40}{z_1}$$

解上式得

$$z_1 = 25, \text{ 则 } z_3 = z_1 + 40 = 65$$

例 8-3 如图 8-3 所示为隧道挖进机中的行星齿轮传动。其中各对齿轮传动均采用标准齿轮传动, 模数 $m = 10 \text{ mm}$ 。已知: $z_1 = 30$, $z_2 = 85$, $z_3 = 32$, $z_4 = 21$, $z_5 = 38$, $z_6 = 97$, $z_7 = 147$, $n_1 = 1\,000 \text{ r/min}$, 试求刀盘最外一点 A 的线速度。

【解题思路及技巧】

此轮系是在系杆上添加系杆的双重行星轮系。整个轮系以 $-n_6$ 绕 $O-O$ 轴线回转, 轮系中任意一个构件 i 的角速度应当看成是相对于系杆 H 的角速度, 并表示成 ω_i^H 或 $\omega_i - \omega_H$, 而不能写成 ω_i 。同时注意到此时的轮系又构成一个复合轮系, 还必须把它分解成定轴轮系和周转轮系。

【解题过程】

为了求点 A 的速度 v_A , 必须求出 n_6 、 n_3 及 n_5 。求解的关键是先给整个轮系

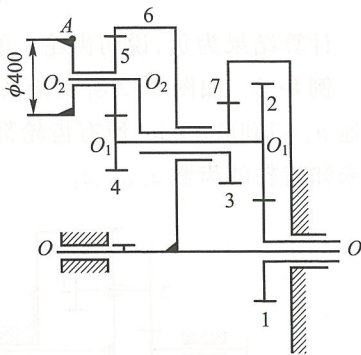


图 8-3

以 $-n_6$ 绕 $O-O$ 轴线回转,此时再观察轮系,有

(1) 齿轮 1、2 为定轴轮系,有

$$i_{12}^6 = \frac{n_1^6}{n_2^6} = \frac{n_1 - n_6}{n_2 - n_6} = -\frac{z_2}{z_1} = -\frac{85}{30} = -\frac{17}{6}$$

(2) 齿轮 3、7 为定轴轮系,且 $n_7 = 0$, 有

$$i_{37}^6 = \frac{n_3^6}{n_7^6} = \frac{n_3 - n_6}{n_7 - n_6} = \frac{n_3 - n_6}{-n_6} = \frac{z_7}{z_3} = \frac{147}{32}$$

(3) 齿轮 4、5、6 及系杆 3 为行星轮系,有

$$(i_{46}^3)^6 = \frac{n_4^6 - n_3^6}{n_6^6 - n_3^6} = \frac{(n_4 - n_6) - (n_3 - n_6)}{(n_6 - n_6) - (n_3 - n_6)} = -\frac{z_6}{z_4} = -\frac{97}{21}$$

$$(i_{56}^3)^6 = \frac{n_5^6 - n_3^6}{n_6^6 - n_3^6} = \frac{(n_5 - n_6) - (n_3 - n_6)}{(n_6 - n_6) - (n_3 - n_6)} = \frac{z_6}{z_5} = \frac{97}{38}$$

因 $n_2 = n_4$, $n_1 = 1\,000\text{ r/min}$, 把上述各式简化, 可得

$$n_4 - n_6 = \frac{6}{17}(n_6 - 1\,000) \quad (\text{a})$$

$$n_3 - n_6 = -\frac{147}{32}n_6 \quad (\text{b})$$

$$\frac{(n_4 - n_3)}{(n_3 - n_6)} = \frac{97}{21} \quad (\text{c})$$

$$\frac{(n_5 - n_3)}{(n_3 - n_6)} = -\frac{97}{38} \quad (\text{d})$$

将式(a)、式(b)及式(c)联立求解得 $n_6 = 13.489\text{ r/min}$, $n_3 = -48.475\text{ r/min}$ 。

将求得的结果代入式(d)求得 $n_5 = 109.697\text{ r/min}$ 。

由各轮之间的运动关系知: $v_A = v_{O_2} + v_{AO_2} = v_{O_1} + v_{O_2O_1} + v_{AO_2}$

$$\text{式中: } v_{O_1} = \omega_6 a_{O_1O} = \frac{\pi n_6}{30 \times 1\,000} \times \frac{m}{2} (z_1 + z_2) = \frac{13.489\pi}{30\,000} \times \frac{10}{2} \times (30 + 85)\text{ m/s} = 0.812\text{ m/s}$$

$$v_{O_2O_1} = \omega_3 a_{O_1O_2} = \frac{\pi n_3}{30 \times 1\,000} \times \frac{m}{2} (z_4 + z_5) = \frac{-48.475\pi}{30\,000} \times \frac{10}{2} \times (21 + 38)\text{ m/s} = -1.497\text{ m/s}$$

$$v_{AO_2} = \omega_5 \times \frac{400}{2} = \frac{\pi n_5}{30 \times 1\,000} \times 200 = \frac{109.697\pi}{30\,000} \times 200\text{ m/s} = 2.297\text{ m/s}$$

故

$$v_A = v_{O1} + v_{O2O1} + v_{AO2} = 0.812 \text{ m/s} - 1.497 \text{ m/s} + 2.297 \text{ m/s} = 1.612 \text{ m/s}$$

8.4 习题解答

习题 8-1 已知图 8-4 所示轮系中各轮的齿数分别为: $z_1 = z_3 = 15$, $z_2 = 30$, $z_4 = 25$, $z_5 = 20$, $z_6 = 40$, 求传动比 i_{16} , 并指出如何改变 i_{16} 的符号。

【解题思路及技巧】

这是由锥齿轮和圆柱齿轮组成的定轴轮系, 各个齿轮的转动方向用箭头表示。

【解题过程】

传动比

$$i_{16} = \frac{z_2}{z_1} \frac{z_4}{z_3} \frac{z_6}{z_5} = \frac{30}{15} \times \frac{25}{15} \times \frac{40}{20} = \frac{20}{3}$$

各个齿轮的转动方向如图 8-5a 所示。若要改变 i_{16} 的符号, 则可在齿轮 5 和齿轮 6 之间加惰轮 7, 如图 8-5b 所示, 其传动比为

$$i_{16} = \frac{z_2}{z_1} \frac{z_4}{z_3} \frac{z_7}{z_5} \frac{z_6}{z_7} = \frac{30}{15} \times \frac{25}{15} \times \frac{z_7}{20} \times \frac{40}{z_7} = \frac{20}{3}$$

由此可见, 加惰轮 7 后传动比 i_{16} 的绝对值并没有改变, 但是其符号发生了改变。

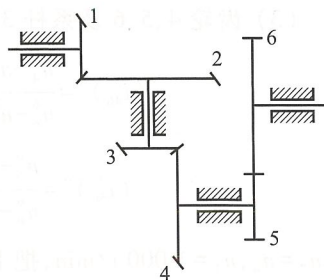


图 8-4

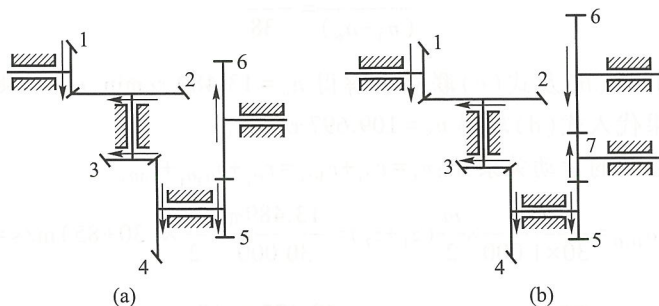


图 8-5

习题 8-2 在图 8-6 所示的手摇提升装置中, 已知各轮齿数为: $z_1 = 20$, $z_2 = 50$, $z_3 = 15$, $z_4 = 30$, $z_6 = 40$, $z_7 = 18$, $z_8 = 51$, 蜗杆 $z_5 = 1$ 且为右旋, 求传动比 i_{18} , 并指

出提升重物时手柄的转向。

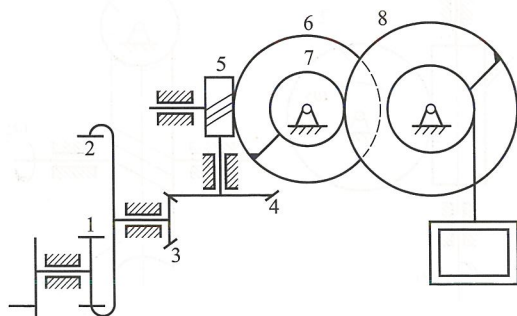


图 8-6

【解题思路及技巧】

这是由锥齿轮、圆柱齿轮和蜗轮蜗杆组成的定轴轮系,各个齿轮的转动方向用箭头表示。

【解题过程】

传动比

$$i_{18} = \frac{z_2}{z_1} \frac{z_4}{z_3} \frac{z_6}{z_5} \frac{z_8}{z_7} = \frac{50}{20} \times \frac{30}{15} \times \frac{40}{1} \times \frac{51}{18} = \frac{1700}{3}$$

提升重物时手柄的转向如图 8-7 箭头所示。

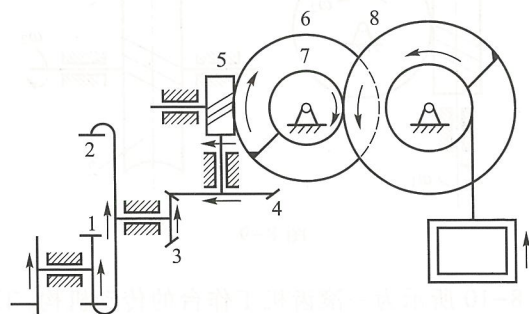


图 8-7

习题 8-3 在图 8-8 所示的蜗轮蜗杆传动中,试分别在左、右两图上标出蜗杆 1 的旋向和转向。

【解题思路及技巧】

- (1) 蜗轮和蜗杆旋向相同;
- (2) 应用左右手法则确定蜗杆转动方向。

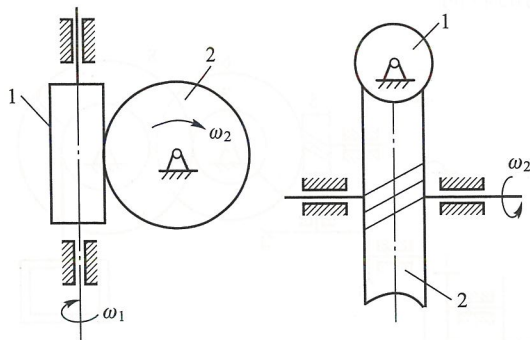


图 8-8

【解题过程】

如图 8-9 所示,应用左右手法则,左图中蜗杆 1 的旋向为右旋,右图中蜗轮的旋向为左旋,因此,蜗杆的旋向也为左旋(把蜗杆传动看作是交错轴斜齿轮传动。当轴交错角 $\Sigma = \beta_1 + \beta_2 = 90^\circ$ 时,两轮的旋向必然相同)。应用左右手法则,右图中蜗杆的转向为逆时针。

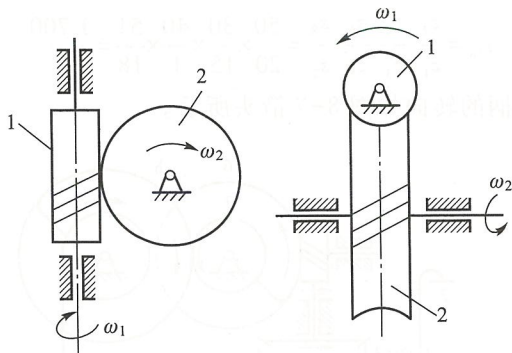


图 8-9

习题 8-4 图 8-10 所示为一滚齿机工作台的传动机构,工作台与蜗轮 5 相固连。已知: $z_1 = z'_1 = 20$, $z_2 = 35$, $z'_4 = 1$ (右旋), $z_5 = 40$, 滚刀 $z_6 = 1$ (左旋), $z_7 = 28$ 。若要加工一个 $z'_5 = 64$ 的齿轮,试决定挂轮组各轮的齿数 z'_2 和 z_4 。

【解题思路及技巧】

这是由一个锥齿轮、圆柱齿轮和蜗轮蜗杆组成的定轴轮系,用该轮系实现了滚刀与被加工齿轮之间的共轭运动。

【解题过程】

滚刀 6 加工齿轮 5' 时,滚刀与被加工齿轮的传动比为

$$i_{65'} = \frac{\omega_6}{\omega_5'} = \frac{z_5'}{z_6} = \frac{64}{1} = 64$$

这个传动比是由从齿轮 7 到蜗轮 5 的传动链实现的, 因此传动比

$$i_{75} = \frac{\omega_7}{\omega_5} = \frac{\omega_6}{\omega_5'} = i_{65'} = 64$$

$$i_{75} = \frac{\omega_7}{\omega_5} = \frac{z_1'}{z_7} \frac{z_2}{z_1} \left(\frac{z_3}{z_2'} \frac{z_4}{z_3} \right) \frac{z_5}{z_4'} = i_{65'} = 64$$

$$\frac{z_4}{z_2'} = 64 \frac{z_7}{z_1'} \frac{z_1}{z_2} \frac{z_2'}{z_3} \frac{z_3}{z_4} = 64 \times \frac{28}{20} \times \frac{20}{35} \times \frac{1}{40} = \frac{32}{25}$$

由此可得

$$z_4 = 32$$

$$z_2' = 25$$

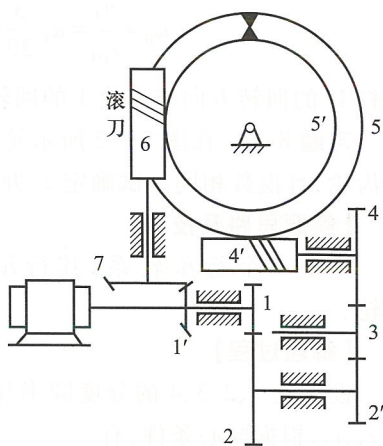


图 8-10

习题 8-5 在图 8-11 所示的轮系中, 已知 $z_1 = 20$, $z_2 = 30$, $z_3 = 18$, $z_4 = 68$, 齿轮 1 的转速 $n_1 = 150 \text{ r/min}$, 求系杆 H 的转速 n_H 的大小和方向。

【解题思路及技巧】

这是一个行星轮系, 其行星轮是双联齿轮。

【解题过程】

先用反转法求转化轮系的传动比

$$i_{14}^H = \frac{n_1 - n_H}{n_4 - n_H} = -\frac{z_2}{z_1} \frac{z_4}{z_3} = -\frac{30}{20} \times \frac{68}{18} = -\frac{17}{3}$$

由于

$$n_4 = 0$$

则

$$i_{14}^H = \frac{\frac{n_1}{n_H} - 1}{-1} = -\frac{17}{3}$$

$$i_{1H} = \frac{n_1}{n_H} = 1 - i_{14}^H = 1 + \frac{17}{3} = \frac{20}{3}$$

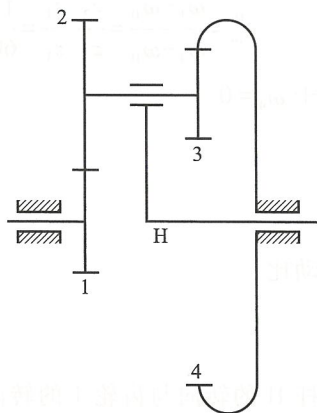


图 8-11

$$n_H = \frac{n_1}{i_{1H}} = n_1 \frac{3}{20} = \frac{150 \times 3}{20} \text{ r/min} = 22.5 \text{ r/min}$$

系杆 H 的回转方向与齿轮 1 的回转方向相同。

习题 8-6 在图 8-12 所示轮系中, 已知 $z_1 = 60, z_2 = 15, z_3 = 18$, 各轮均为标准齿轮, 且模数相同。试确定 z_4 并计算传动比 i_{1H} 的大小及系杆 H 的转向。

【解题思路及技巧】

这是一个行星轮系, 其行星轮是双联齿轮。

【解题过程】

设齿轮 1、2、3、4 的分度圆半径分别为 r_1 、 r_2 、 r_3 、 r_4 , 根据同心条件, 有

$$r_4 - r_3 = r_1 - r_2$$

即

$$z_4 - z_3 = z_1 - z_2$$

$$z_4 = z_1 - z_2 + z_3 = 60 - 15 + 18 = 63$$

先用“反转法”求转化轮系的传动比

$$i_{14}^H = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_4 - \omega_H} = \frac{z_2}{z_1} \frac{z_4}{z_3} = \frac{15}{60} \times \frac{63}{18} = \frac{7}{8}$$

由于 $\omega_4 = 0$

$$i_{14}^H = \frac{\frac{\omega_1}{\omega_H} - 1}{-1} = \frac{7}{8}$$

传动比

$$i_{1H} = 1 - i_{14}^H = 1 - \frac{7}{8} = \frac{1}{8}$$

系杆 H 的转向与齿轮 1 的转向相同。

习题 8-7 在图 8-13 所示轮系中, 已知 $z_1 = z_4 = 40, z_2 = z_5 = 30, z_3 = z_6 = 100$, 齿轮 z_1 的转速 $n_1 = 100 \text{ r/min}$ 。求系杆 H 的转速 n_H 的大小和方向。

【解题思路及技巧】

先把轮系分解为两部分, 一部分为定轴轮系 $z_1 - z_2 - z_3$, 一部分为周转轮系 $z_4 - z_5 - z_6 - H$ 。

【解题过程】

先求解定轴轮系 $z_1 - z_2 - z_3$, 其传动比为

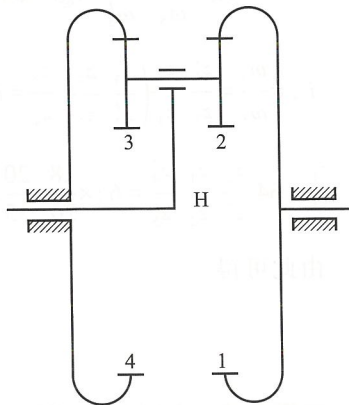


图 8-12

$$i_{13} = \frac{n_1}{n_3} = -\frac{z_2}{z_1} \frac{z_3}{z_2} = -\frac{z_3}{z_1} = -\frac{100}{40} = -2.5$$

求解周转轮系 $z_4-z_5-z_6-H$, 其转化轮系传动比为

$$i_{46}^H = \frac{n_4 - n_H}{n_6 - n_H} = -\frac{z_5}{z_4} \frac{z_6}{z_5} = -\frac{z_6}{z_4} = -\frac{100}{40} = -2.5$$

由于

$$n_6 = 0$$

则

$$i_{46}^H = \frac{\frac{n_4}{n_H} - 1}{-1} = -2.5$$

$$i_{4H} = \frac{n_4}{n_H} = 1 - i_{46}^H = 1 + 2.5 = 3.5$$

由于

$$n_4 = n_3$$

系杆 H 的转速为

$$n_H = \frac{n_4}{i_{4H}} = \frac{1}{i_{4H}} \frac{n_1}{i_{13}} = \frac{100}{3.5 \times (-2.5)} \text{ r/min} = -11.43 \text{ r/min}$$

系杆 H 的回转方向与齿轮 1 的回转方向相反。

习题 8-8 在图 8-14 所示的双级行星齿轮减速器中, 各齿轮的齿数为: $z_1 = z_6 = 20, z_3 = z_4 = 40, z_2 = z_5 = 10$, 试求:

(1) 当固定齿轮 4 时, 传动比 i_{1H_2} ;

(2) 当固定齿轮 3 时, 传动比 i_{1H_2} 。

【解题思路及技巧】

此轮系由两部分组成, 齿轮 1、2、3 及系杆 H_1 (4) 组成一个差动轮系, 齿轮 6、5、4(H_1) 及系杆 H_2 组成另一个差动轮系。

【解题过程】

(1) 当固定齿轮 4 时求传动比 i_{1H_2}

由图 8-14 可以看出, 当固定齿轮 4

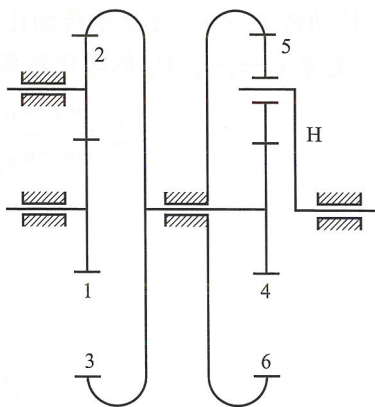


图 8-13

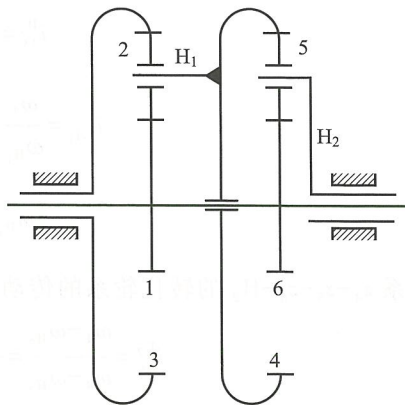


图 8-14

时,传动链 $z_1-z_2-z_3$ 不影响传动比 i_{1H_2} 。

轮系 $z_4-z_5-z_6-H_2$ 的转化轮系的传动比为

$$i_{64}^{H_2} = \frac{\omega_1 - \omega_{H_2}}{\omega_4 - \omega_{H_2}} = -\frac{z_5}{z_6} \frac{z_4}{z_5} = -\frac{10}{20} \times \frac{40}{10} = -2$$

由于

$$\omega_4 = 0$$

则

$$i_{64}^{H_2} = \frac{\frac{\omega_1}{\omega_{H_2}} - 1}{-1} = -2$$

$$i_{1H_2} = \frac{\omega_1}{\omega_{H_2}} = 1 - i_{64}^{H_2} = 1 + 2 = 3$$

(2) 当固定齿轮 3 时求传动比 i_{1H_2}

先把轮系分解为两部分 $z_1-z_2-z_3-H_1$ 和 $z_4-z_5-z_6-H_2$ 。轮系 $z_1-z_2-z_3-H_1$ 的转化轮系的传动比为

$$i_{13}^{H_1} = \frac{\omega_1 - \omega_{H_1}}{\omega_3 - \omega_{H_1}} = -\frac{z_2}{z_1} \frac{z_3}{z_2} = -\frac{40}{20} = -2$$

由于

$$\omega_3 = 0$$

则

$$i_{13}^{H_1} = \frac{\frac{\omega_1}{\omega_{H_1}} - 1}{-1} = -2$$

$$i_{1H_1} = \frac{\omega_1}{\omega_{H_1}} = 1 - i_{13}^{H_1} = 1 + 2 = 3$$

$$\omega_{H_1} = \frac{\omega_1}{i_{1H_1}} = \frac{\omega_1}{3}$$

轮系 $z_4-z_5-z_6-H_2$ 的转化轮系的传动比为

$$i_{64}^{H_2} = \frac{\omega_1 - \omega_{H_2}}{\omega_4 - \omega_{H_2}} = -\frac{z_5}{z_6} \frac{z_4}{z_5} = -\frac{10}{20} \times \frac{40}{10} = -2$$

由于

$$\omega_4 = \omega_{H_1}$$

$$i_{64}^{H_2} = \frac{\omega_1 - \omega_{H_2}}{\omega_4 - \omega_{H_2}} = \frac{\omega_1 - \omega_{H_2}}{\frac{\omega_1}{3} - \omega_{H_2}} = \frac{\frac{\omega_1}{3} - 1}{\frac{\omega_1}{3\omega_{H_2}} - 1} = -2$$

$$i_{1H_2} = \frac{\omega_1}{\omega_{H_2}} = \frac{1 - i_{64}^{H_2}}{1 - \frac{i_{64}^{H_2}}{3}} = \frac{1+2}{1+\frac{2}{3}} = \frac{9}{5} = 1.8$$

习题 8-9 在图 8-15 所示的双螺旋桨飞机的减速器中, 已知 $z_1 = 26, z_2 = z_2' = 20, z_4 = 30, z_5 = z_5' = 18$, 齿轮 1 的转速 $n_1 = 15\,000 \text{ r/min}$, 求螺旋桨 P 和 Q 的转速 n_P, n_Q 的大小和方向。

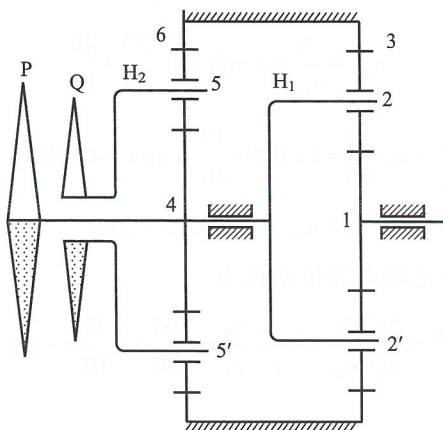


图 8-15

【解题思路及技巧】

此轮系由两部分组成, 齿轮 1、2、3 及系杆 H_1 (4) 组成一个行星轮系, 齿轮 6、5、4 (H_1) 及系杆 H_2 组成另一个行星轮系。

【解题过程】

根据同心条件确定齿数 z_3 和 z_6 :

$$\frac{z_3}{2} = \frac{z_1}{2} + z_2$$

$$z_3 = z_1 + 2z_2 = 26 + 2 \times 20 = 66$$

$$\frac{z_6}{2} = \frac{z_4}{2} + z_5$$

$$z_6 = z_4 + 2z_5 = 30 + 2 \times 18 = 66$$

先把轮系分解为两部分 $z_1 - z_2 - z_3 - H_1$ 和 $z_4 - z_5 - z_6 - H_2$, 轮系 $z_1 - z_2 - z_3 - H_1$ 的转化轮系的传动比为

$$i_{13}^{H_1} = \frac{n_1 - n_{H_1}}{n_3 - n_{H_1}} = -\frac{z_2}{z_1} \frac{z_3}{z_2} = -\frac{66}{26} = -\frac{33}{13}$$

由于

$$n_3 = 0$$

则

$$i_{13}^{H_1} = \frac{\frac{n_1}{n_{H_1}} - 1}{-1} = -\frac{33}{13}$$

$$i_{1H_1} = \frac{n_1}{n_{H_1}} = 1 - i_{13}^{H_1} = 1 + \frac{33}{13} = \frac{46}{13}$$

$$n_{H_1} = \frac{n_1}{i_{1H_1}} = n_1 \frac{13}{46} = 15\,000 \times \frac{13}{46} \text{ r/min} = 4\,239.13 \text{ r/min}$$

$$n_p = n_{H_1} = 4\,239.13 \text{ r/min}$$

轮系 $z_4 - z_5 - z_6 - H_2$ 的转化轮系的传动比为

$$i_{46}^{H_2} = \frac{n_4 - n_{H_2}}{n_6 - n_{H_2}} = -\frac{z_5}{z_4} \frac{z_6}{z_5} = -\frac{66}{30} = -\frac{22}{10} = -2.2$$

由于

$$n_4 = n_{H_1}$$

$$n_6 = 0$$

则

$$i_{46}^{H_2} = \frac{n_4 - n_{H_2}}{n_6 - n_{H_2}} = \frac{\frac{n_{H_1}}{n_{H_2}} - 1}{-1} = -2.2$$

$$\frac{n_{H_1}}{n_{H_2}} = 1 - i_{46}^{H_2} = 1 + 2.2 = 3.2$$

$$n_{H_2} = \frac{n_{H_1}}{3.2} = \frac{1}{3.2} \cdot \frac{n_1}{i_{1H_1}} = 15\,000 \times \frac{1}{3.2} \times \frac{13}{46} \text{ r/min} = 1\,324.7 \text{ r/min}$$

$$n_Q = n_{H_2} = 1\,324.7 \text{ r/min}$$

螺旋桨 P 和 Q 的回转方向相同。

习题 8-10 在图 8-16 所示的脚踏车里程表的机构中, C 为车轮轴, 各轮齿数为 $z_1 = 17, z_3 = 23, z_4 = 19, z_4' = 20, z_5 = 24$ 。设轮胎受压变形后使 28 in (英寸, 1 in = 25.4 mm) 车轮的有效直径为 0.7 m, 当车行 1 km 时, 表上的指针刚好回转一周, 求齿轮 2 的齿数 z_2 。

【解题思路及技巧】

把轮系分解为两部分 $z_1 - z_2$ 和 $z_3 - z_4 - z_4' - z_5 - H, z_1 - z_2$ 为定轴轮系, $z_3 - z_4 - z_4' - z_5 - H$ 为周转轮系。

【解题过程】

(1) 求当车行 1 km 时, 车轮轴 C 的转数 n_C 为

$$n_C = \frac{1\,000}{0.7\pi}$$

(2) 把轮系分解为两部分 $z_1 - z_2$ 和 $z_3 - z_4 - z_4' - z_5 - H, z_1 - z_2$ 为定轴轮系, 其传动比为

$$i_{12} = \frac{n_C}{n_2} = -\frac{z_2}{z_1} = -\frac{z_2}{17}$$

$$n_2 = \frac{n_C}{i_{12}}$$

$z_3 - z_4 - z_4' - z_5 - H$ 为周转轮系, 其转化机构的传动比为

$$i_{35}^H = \frac{n_3 - n_H}{n_5 - n_H} = \frac{z_4}{z_3} \frac{z_5}{z_4'} = \frac{19}{23} \times \frac{24}{20} = \frac{114}{115}$$

由于

$$n_3 = 0$$

则

$$i_{35}^H = \frac{-1}{\frac{n_5}{n_H} - 1} = \frac{114}{115}$$

$$\frac{n_5}{n_H} = 1 - \frac{1}{i_{35}^H} = 1 - \frac{115}{114} = -\frac{1}{114}$$

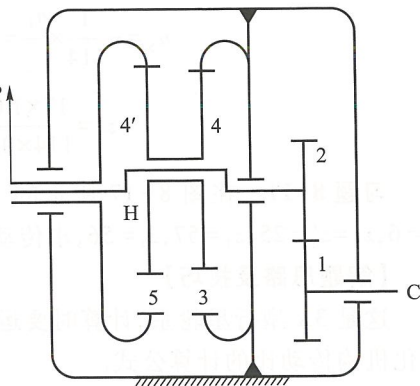


图 8-16

$$n_5 = -\frac{n_H}{114}$$

由于

$$n_H = n_2$$

则

$$n_5 = -\frac{1}{114} \times \frac{n_c}{i_{12}} = -\frac{1}{114} \times \frac{-17}{z_2} \times \frac{1\,000}{0.7\pi} = 1$$

$$z_2 = \frac{17 \times 1\,000}{114 \times 0.7\pi} = 67.81 \approx 68$$

习题 8-11 在图 8-17 所示的三爪电动卡盘的传动轮系中,各轮齿数为 $z_1 = 6, z_2 = z_2' = 25, z_3 = 57, z_4 = 56$, 求传动比 i_{14} 。

【解题思路及技巧】

这是 3K 型行星轮系, 计算时要运用两次转化机构传动比的计算公式。

【解题过程】

该轮系转化机构的传动比为

$$i_{13}^H = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_3 - \omega_H} = -\frac{z_2}{z_1} \frac{z_3}{z_2} = -\frac{57}{6} = -\frac{19}{2}$$

$$i_{14}^H = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_4 - \omega_H} = -\frac{z_2}{z_1} \frac{z_4}{z_2'} = -\frac{25}{6} \times \frac{56}{25} = -\frac{28}{3}$$

由于

$$\omega_3 = 0$$

则

$$i_{13}^H = \frac{\frac{\omega_1}{\omega_H} - 1}{-1} = -\frac{19}{2}$$

$$\frac{\omega_1}{\omega_H} = 1 - i_{13}^H$$

$$i_{14}^H = \frac{\frac{\omega_1}{\omega_H} - 1}{\frac{\omega_4}{\omega_H} - 1} = -\frac{28}{3}$$

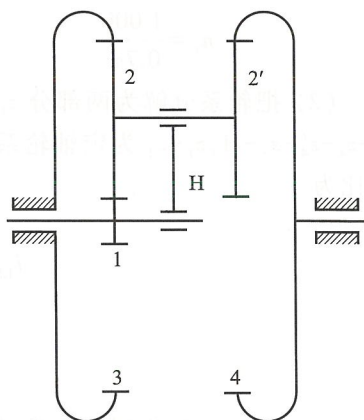


图 8-17

$$\frac{\omega_4}{\omega_H} = 1 + \frac{\frac{\omega_1}{\omega_H} - 1}{i_{14}^H} = 1 + \frac{1 - i_{13}^H - 1}{i_{14}^H} = 1 - \frac{i_{13}^H}{i_{14}^H}$$

$$i_{14}^H = \frac{\omega_1}{\omega_4} = \frac{\frac{\omega_1}{\omega_H}}{\frac{\omega_4}{\omega_H}} = \frac{1 - i_{13}^H}{1 - \frac{i_{13}^H}{i_{14}^H}} = \frac{1 + \frac{19}{2}}{1 - \frac{-19}{2} \times \frac{-3}{28}} = -588$$

习题 8-12 在图 8-18 所示的串联行星轮系中, 已知各轮的齿数, 求传动比 i_{aH} 。

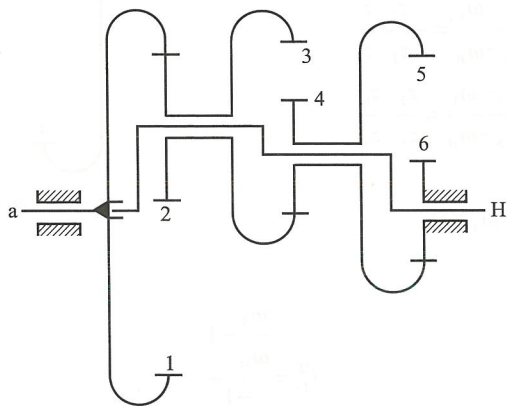


图 8-18

【解题思路及技巧】

这是一个结构比较复杂的行星轮系。该轮系的行星轮是两个双联齿轮, 支承两个行星轮的是一个系杆 H 。

【解题过程】

该轮系转化机构的传动比为

$$i_{a6}^H = \frac{\omega_a - \omega_H}{\omega_6 - \omega_H} = \frac{z_2}{z_1} \frac{z_4}{z_3} \frac{z_6}{z_5}$$

由于

$$\omega_6 = 0$$

则

$$i_{a6}^H = \frac{\frac{\omega_a}{\omega_H} - 1}{-1}$$

$$i_{aH} = 1 - i_{a6}^H = 1 - \frac{z_2}{z_1} \frac{z_4}{z_3} \frac{z_6}{z_5}$$

习题 8-13 在图 8-19 所示的增速器中,已知各轮齿数,求传动比 i_{16} 。

【解题思路及技巧】

这是一个行星轮系,3 个齿轮(齿轮 3、齿轮 2 和齿轮 5)组成一个行星轮系,计算时要运用两次转化机构传动比的计算公式。

【解题过程】

该轮系转化机构的传动比为

$$i_{14}^H = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_4 - \omega_H} = -\frac{z_2}{z_1} \frac{z_4}{z_3}$$

$$i_{16}^H = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_6 - \omega_H} = \frac{z_2}{z_1} \frac{z_6}{z_5}$$

由于

$$\omega_4 = 0$$

则

$$i_{14}^H = \frac{\frac{\omega_1}{\omega_H} - 1}{-1}$$

$$\frac{\omega_1}{\omega_H} = 1 - i_{14}^H$$

$$i_{16}^H = \frac{\frac{\omega_1}{\omega_H} - 1}{\frac{\omega_6}{\omega_H} - 1}$$

$$\frac{\omega_6}{\omega_H} = 1 + \frac{\frac{\omega_1}{\omega_H} - 1}{i_{16}^H} = 1 + \frac{1 - i_{14}^H - 1}{i_{16}^H} = 1 - \frac{i_{14}^H}{i_{16}^H}$$

$$i_{16} = \frac{\omega_1}{\omega_6} = \frac{\frac{\omega_1}{\omega_H}}{\frac{\omega_6}{\omega_H}} = \frac{1 - i_{14}^H}{1 - \frac{i_{14}^H}{i_{16}^H}} = \frac{i_{16}^H (1 - i_{14}^H)}{i_{16}^H - i_{14}^H} = -\frac{\frac{z_2}{z_1} \frac{z_6}{z_5} \left(1 + \frac{z_2}{z_1} \frac{z_4}{z_3} \right)}{\frac{z_2}{z_1} \frac{z_6}{z_5} + \frac{z_2}{z_1} \frac{z_4}{z_3}}$$

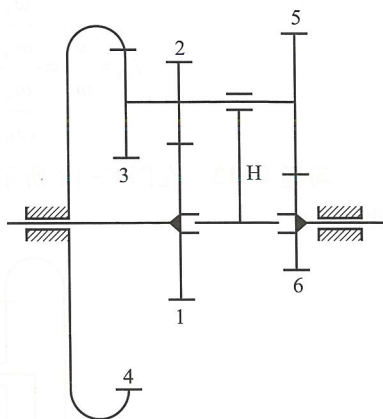


图 8-19

整理,得

$$i_{16} = \frac{z_6(z_1z_3 + z_2z_4)}{z_1(z_3z_6 + z_4z_5)}$$

习题 8-14 试设计图 8-20 所示的 2K-H 行星轮系中各轮的齿数。

(1) 当 $i_{1H} = \frac{18}{5}$, 行星轮个数 $K=3$, 各齿轮模数相同且为标准齿轮;

(2) 当 $i_{1H} = \frac{16}{3}$, 行星轮个数 $K=4$, 各轮模数相同, 但为提高齿轮的传动质量并减轻质量而采用变位齿轮。

【解题思路及技巧】

各轮齿数的选配须满足四个条件, 即保证实现给定的传动比, 满足同心条件、安装条件和邻接条件。

【解题过程】

(1) 当 $i_{1H} = \frac{18}{5}$, 行星轮个数 $K=3$, 求各轮的齿数。

由配齿公式

$$z_1 : z_2 : z_3 : N = z_1 : \frac{z_1(i_{1H}-2)}{2} : z_1(i_{1H}-1) : \frac{z_1 i_{1H}}{K}$$

$$z_1 : z_2 : z_3 : N = z_1 : \frac{z_1\left(\frac{18}{5}-2\right)}{2} : z_1\left(\frac{18}{5}-1\right) : \frac{z_1 \frac{18}{5}}{3} = z_1 : z_1 \frac{4}{5} : z_1 \frac{13}{5} : z_1 \frac{6}{5}$$

取

$$z_1 = 25$$

则

$$z_2 = \frac{4}{5}z_1 = \frac{4}{5} \times 25 = 20$$

$$z_3 = \frac{13}{5}z_1 = \frac{13}{5} \times 25 = 65$$

$$N = \frac{6}{5}z_1 = \frac{6}{5} \times 25 = 30$$

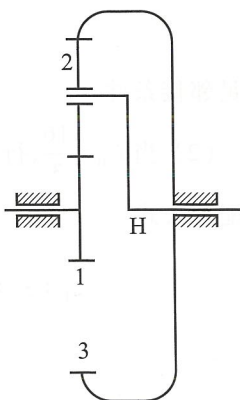


图 8-20

校验邻接条件

$$(z_1 + z_2) \sin \frac{\pi}{K} > z_2 + 2h_a^*$$

$$(25 + 20) \times \sin \frac{\pi}{3} = 38.97 > 20 + 2 = 22$$

满足邻接条件。

(2) 当 $i_{1H} = \frac{16}{3}$, 行星轮个数 $K=4$, 求各轮的齿数。

由配齿公式

$$z_1 : z_2 : z_3 : N = z_1 : \frac{z_1(i_{1H} - 2)}{2} : z_1(i_{1H} - 1) : \frac{z_1 i_{1H}}{K}$$

$$z_1 : z_2 : z_3 : N = z_1 : \frac{z_1 \left(\frac{16}{3} - 2 \right)}{2} : z_1 \left(\frac{16}{3} - 1 \right) : \frac{z_1 \frac{16}{3}}{4} = z_1 : z_1 \frac{5}{3} : z_1 \frac{13}{3} : z_1 \frac{4}{3}$$

取

$$z_1 = 15$$

则

$$z_2 = \frac{5}{3} z_1 = \frac{5}{3} \times 15 = 25$$

$$z_3 = \frac{13}{3} z_1 = \frac{13}{3} \times 15 = 65$$

$$N = \frac{4}{3} z_1 = \frac{4}{3} \times 15 = 20$$

为了使齿轮 1 不发生根切, 应该采取正变位齿轮。变位系数为

$$x_1 = x_{\min} = h_a^* \frac{z_{\min} - z_1}{z_{\min}} = \frac{17 - 15}{17} \approx 0.12$$

齿轮 1 与齿轮 2 采取高度变为传动, 齿轮 2 的变位系数为

$$x_2 = -x_1 = -0.12$$

校验齿轮 2 是否根切

$$x_{\min} = h_a^* \frac{z_{\min} - z_1}{z_{\min}} = \frac{17 - 25}{17} = -0.47$$

$$x_2 > x_{\min}$$

齿轮 2 不发生根切。

校验邻接条件

$$(z_1 + z_2) \sin \frac{\pi}{K} > z_2 + 2(h_a^* + x_2)$$

$$(15 + 25) \times \sin \frac{\pi}{4} = 28.28 > 25 + 2 \times (1 - 0.12) = 26.76$$

满足邻接条件。

习题 8-15 图 8-21 所示轮系, 已知各轮齿数分别为: $z_1 = 20, z_2 = 40, z_3 = 35, z_4 = 20, z_5 = 75, z_{3'} = 30, z_6 = 30, z_7 = 90, z_{5'} = 80, z_8 = 30, z_9 = 20, z_{3''} = 1$ (蜗杆), $z_{10} = 50$ (蜗轮); 齿轮 1 的转速为 $n_1 = 100 \text{ r/min}$, 转向如图。求蜗轮 10 转速 n_{10} 的大小及转动方向。

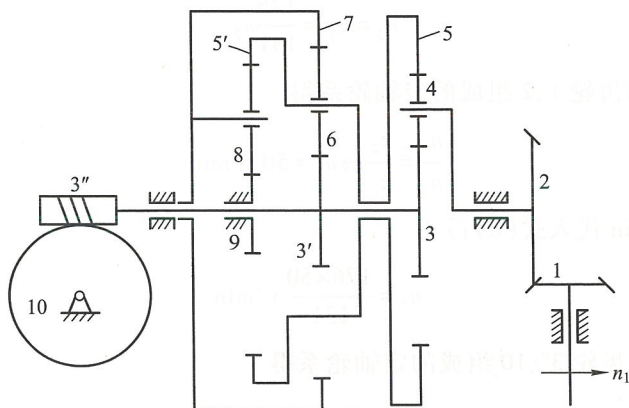


图 8-21

【解题思路及技巧】

本题的解题关键是正确划分轮系: 齿轮 1、2 组成定轴轮系; 齿轮 3''、10 组成定轴轮系; 齿轮 3、4、5、2 组成差动轮系; 齿轮 3'、6、7、5' 组成差动轮系; 齿轮 9、8、5'、7 组成行星轮系。

【解题过程】

(1) 根据齿轮 9、8、5'、7 组成的行星轮系得

$$\frac{n_9 - n_7}{n_{5'} - n_7} = -\frac{z_{5'}}{z_9} \quad (\text{a})$$

将 $n_9 = 0$ 代入式(a)得

$$n_7 = -\frac{4}{5}n_{5'}$$

(2) 根据齿轮 3'、6、7、5'组成的差动轮系得

$$\frac{n_{3'} - n_5}{n_7 - n_5} = -\frac{z_7}{z_{3'}} \quad (\text{b})$$

将 $n_5 = n_{5'}$ 代入式(b)得

$$n_5 = n_{5'} = \frac{5}{8}n_{3'}$$

(3) 根据齿轮 3、4、5、2 组成的差动轮系得

$$\frac{n_3 - n_2}{n_5 - n_2} = -\frac{z_5}{z_3} \quad (\text{c})$$

将 $n_3 = n_{3'}$ 代入式(c)得

$$n_3 = n_{3'} = \frac{176}{131}n_2 \quad (\text{d})$$

(4) 根据齿轮 1、2 组成的定轴轮系得

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{z_2}{z_1} \Rightarrow n_2 = 50 \text{ r/min}$$

将 $n_2 = 50 \text{ r/min}$ 代入式(d)得

$$n_3 = \frac{176 \times 50}{131} \text{ r/min}$$

(5) 根据齿轮 3''、10 组成的定轴轮系得

$$\frac{n_{3''}}{n_{10}} = \frac{z_{10}}{z_{3''}} \quad (\text{e})$$

将 $n_{3''} = n_3$ 代入式(e)得

$$n_{10} = \frac{176}{131} \text{ r/min}$$

(6) 由于 3'' 与 2 同向,根据左右手法则确定蜗轮为沿顺时针方向转动。

习题 8-16 如图 8-22a 所示轮系中, $z_5 = z_2 = 25$, $z_{2'} = 20$, 组成轮系的各齿轮模数相同。齿轮 1' 和 3' 轴线重合, 且齿数相同。求轮系传动比 i_{54} 。

【解题思路及技巧】

本题的解题关键是正确划分轮系: 齿轮 1、2—2'、3 及系杆 4 组成差动轮系; 齿轮 1、2、5 及系杆 4 组成差动轮系; 齿轮 5、2—2'、3 及系杆 4 组成差动轮系; 由齿轮 1'、6、3' 组成定轴轮系。其中 3 个周转轮系并不是独立的, 任取两个周转轮系求解即可。

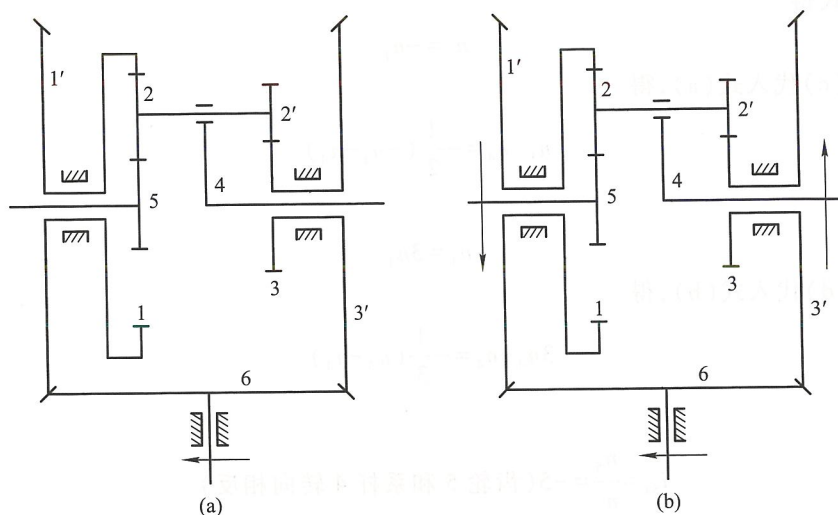


图 8-22

【解题过程】

(1) 求齿数 z_1 和 z_3

因为齿轮 1 和齿轮 5 同轴线, 所以有

$$r_1 - r_2 = r_5 + r_2$$

由于各齿轮模数相同, 则

$$z_1 = z_5 + 2z_2 = 25 + 2 \times 25 = 75$$

因为齿轮 3 和齿轮 5 同轴线, 所以有

$$r_5 + r_2 = r_2 + r_3$$

由于各齿轮模数相同, 则

$$z_3 = z_5 + z_2 - z_2 = 25 + 25 - 20 = 30$$

(2) 齿轮 1、2—2'、3 及系杆 4 组成差动轮系, 则

$$i_{13}^4 = \frac{n_1 - n_4}{n_3 - n_4} = -\frac{z_2 z_3}{z_1 z_2} = -\frac{25 \times 30}{75 \times 20} = -\frac{1}{2} \quad (\text{a})$$

(3) 齿轮 1、2、5 及系杆 4 组成差动轮系, 则

$$i_{15}^4 = \frac{n_1 - n_4}{n_5 - n_4} = -\frac{z_5}{z_1} = -\frac{25}{75} = -\frac{1}{3} \quad (\text{b})$$

(4) 齿轮 1'、6、3' 组成定轴轮系, 齿轮 1' 和 3' 轴线重合, 且齿数相同, 采用画箭头的方法判别 $i_{1'3'}$ 的“+”“-”号 (图 8-22b), 则

$$i_{1'3'} = \frac{n_{1'}}{n_{3'}} = \frac{n_1}{n_3} = -\frac{z_{3'}}{z_{1'}} = -1$$

由上式得

$$n_3 = -n_1 \quad (c)$$

将式(c)代入式(a),得

$$n_1 - n_4 = -\frac{1}{2}(-n_1 - n_4)$$

解得

$$n_1 = 3n_4 \quad (d)$$

将式(d)代入式(b),得

$$3n_4 - n_4 = -\frac{1}{3}(n_5 - n_4)$$

解得

$$i_{54} = \frac{n_5}{n_4} = -5 \text{ (齿轮 5 和系杆 4 转向相反)}$$

习题 8-17 图 8-23 所示由两台电动机驱动的轮系中,其合成转速由系杆 H 输出(经齿轮 7 向外传递运动)。已知两台电动机的转速均为 588 r/min,且其转动方向相同。各齿轮的齿数分别为 $z_1 = 15, z_2 = z_{2'} = 36, z_3 = 87, z_4 = 110, z_5 = 67, z_6 = 19$ 。试求系杆的转速是多少?当两台电动机之一(A 或 B)发生故障(此时该电动机被刹住)而停转时,系杆 H 的转速分别为多少?

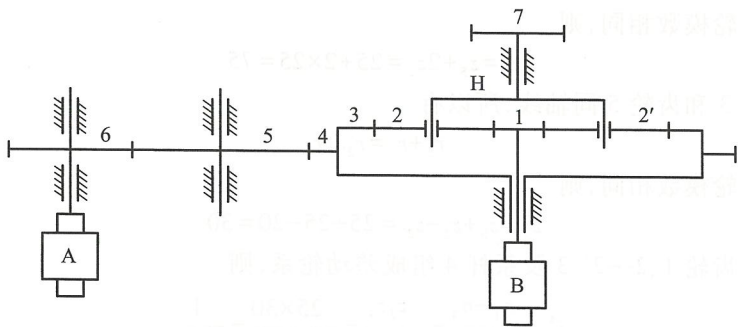


图 8-23

【解题思路及技巧】

本题的解题关键是正确划分轮系:齿轮 6、5、4 组成定轴轮系,齿轮 1、2—2'、3 和系杆 H 组成周转轮系;当电动机 A 发生故障时, $n_3 = 0$;当电动机 B 发生故障时, $n_1 = 0$ 。

【解题过程】

(1) 齿轮 6、5、4 组成定轴轮系,则

$$i_{64} = \frac{n_6}{n_4} = (-1)^2 \frac{z_5 z_4}{z_6 z_5} \Rightarrow n_4 = (-1)^2 \frac{z_6}{z_4} n_6 = 588 \times \frac{19}{110} = 101.564 \text{ r/min}$$

齿轮 1、2—2'、3 和系杆 H 组成周转轮系, 则

$$i_{13}^H = \frac{n_1 - n_H}{n_3 - n_H} = -\frac{z_3}{z_1} = -\frac{87}{15} \Rightarrow n_H = \frac{15n_1 + 87n_3}{102} \quad (\text{a})$$

由于 $n_1 = n_B = 588 \text{ r/min}$, $n_3 = n_4 = 101.564 \text{ r/min}$, 将 n_1 与 n_3 代入式 (a) 得

$$n_H = \frac{15 \times 588 + 87 \times 101.564}{102} = 173.098 \text{ r/min}$$

系杆 H 与电动机 A、B 的转动方向相同。

(2) 当电动机 A 发生故障时, 此时 $n_3 = 0$, 将其代入式 (a) 得系杆的转速为

$$n_H = \frac{15n_1 + 87n_3}{102} = \frac{15 \times 588}{102} = 86.47 \text{ r/min}$$

系杆 H 的转动方向与电动机 B 的转动方向相同。

(3) 当电动机 B 发生故障时, 此时 $n_1 = 0$, 将其代入式 (a) 得系杆的转速为

$$n_H = \frac{15n_1 + 87n_3}{102} = \frac{87 \times 101.564}{102} = 86.628 \text{ r/min}$$

系杆 H 的转动方向与电动机 A 的转动方向相同。

第九章 其他常用机构

9.1 基本要求

1. 掌握棘轮机构、槽轮机构及万向联轴器的组成、工作原理、运动特性及几何尺寸的计算;
2. 了解不完全齿轮机构及凸轮式间歇运动机构的工作原理及运动特点。

9.2 重点及难点解析

9.2.1 本章重点

本章重点是棘轮机构、槽轮机构和万向联轴器的组成、运动特点及其设计的要点。

1. 棘轮机构

常用棘轮机构可分为轮齿式棘轮机构和摩擦式棘轮机构两大类,但其工作原理都是相同的。轮齿式外啮合棘轮机构由摇杆、棘爪、棘轮、止动爪和机架组成,可将主动摇杆的连续往复摆动变换为从动棘轮的单向间歇转动,其棘轮转角可以在较大范围内调节,具有结构简单、加工方便、运动可靠等特点,但冲击、噪声大,运动精度低。

轮齿式棘轮机构的设计要点:

(1) 棘轮齿形的选择

棘轮的齿形有双向作用的齿形和单向作用的齿形两种。双向作用的齿形一般采用对称梯形或矩形,相应棘爪制成可翻转或可提升并可转 180° ;而单向作用的齿形通常都采用不对称梯形或三角形。

(2) 棘轮齿数 z 和棘爪数目 j 的确定

棘轮齿数 z 由棘轮的最小转角 $\varphi_{\min}$ 确定,即 $z \geq 2\pi/\varphi_{\min}$,最常用的棘爪数目 $j=1$,但当棘爪摆杆的摆角小于棘轮的齿距角 $360^\circ/z$ 时,必须采用多棘爪的棘轮机构,一般取 $j=1\sim 3$ 。

(3) 棘轮的模数 m 和齿距 p 的确定

$m = d_a / z, p = \pi m$, 其中 d_a 为棘轮的齿顶圆直径。

(4) 棘轮齿面倾斜角 β 的确定

棘轮齿面倾斜角 β 为工作面与径向线之间的夹角。为了使棘爪能顺利进入棘轮齿间, 要求齿面总作用力 F_R 对棘爪轴心的力矩方向应迫使棘爪进入棘轮齿底, 即应满足条件: $\beta > \varphi$, 其中 φ 为摩擦角。

2. 槽轮机构

槽轮机构由主动拨盘、从动槽轮及机架组成, 可将主动拨盘的连续转动变换为槽轮的间歇转动, 具有结构简单、尺寸小、机械效率较高、能较平稳地间歇转位等特点。

(1) 槽轮机构的运动系数

在一个运动循环周期内槽轮运动时间 t_2 与运动循环周期时间 t_1 (主动拨盘的运动时间) 之比称为槽轮机构的运动系数, 用 τ 表示, 即

$$\tau = \frac{t_2}{t_1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{z}$$

式中, z 为槽轮的槽数。

如果在主动拨盘 1 上均匀分布有 k 个圆销, 则该槽轮机构的运动系数为

$$\tau = k \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{z} \right)$$

运动系数 τ 必须大于零而小于 1。

(2) 外槽轮机构的运动特性

主动拨盘以等速度 ω_1 转动, 当主动拨盘处在 φ_1 位置角时, 从动槽轮所处的位置角 φ_2 、角速度 ω_2 及角加速度 α_2 分别为

$$\varphi_2 = \arctan \left[\lambda \sin \varphi_1 / (1 - \lambda \cos \varphi_1) \right]$$

$$\omega_2 = \omega_1 \lambda (\cos \varphi_1 - \lambda) / (1 - 2\lambda \cos \varphi_1 + \lambda^2)$$

$$\alpha_2 = \omega_1^2 \lambda (\lambda^2 - 1) \sin \varphi_1 / (1 - 2\lambda \cos \varphi_1 + \lambda^2)^2$$

式中, $\lambda = R/a = \sin(\pi/z)$ (a 为槽轮机构的中心距, R 为圆销半径)。

当主动拨盘的角速度 ω_1 一定时, 槽轮的角速度及角加速度的变化取决于槽轮的槽数 z , 随槽数 z 的增多而减少。此外, 圆销在槽轮啮入和啮出时, 有柔性冲击, 其冲击将随 z 减少而增大。

(3) 槽轮机构设计的要点

1) 槽轮槽数的选择。由式 $\tau = k \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{z} \right)$ 可知, 槽轮槽数 z 越多, τ 越大, 即槽

轮传动的时间增加,停歇的时间缩短。因 $\tau > 0$, 故槽数 $z \geq 3$, 但当 $z > 12$ 时, τ 值变化不大, 故很少使用 $z > 12$ 的槽轮。因此, 一般取 $z = 3 \sim 12$, 而常用槽数为 3、4、6、8。

一般情况下, 槽轮停歇时间为机器的工作行程时间, 槽轮传动的时间则是空行程时间。为了提高生产率, 要求机器的空行程时间尽量短, 即 τ 值要小, 也就是槽数要少。由于 z 越少, 槽轮机构的运动和动力性能越差, 故一般在设计槽轮机构时, 应根据工作要求、受力情况、生产率等因素综合考虑, 合理选择 τ , 再确定槽数 z , 一般多取 $z = 4$ 或 6。

2) 圆销数目的确定。单销外啮合槽轮机构的 τ 值总是小于 0.5, 即槽轮的运动时间总是小于其停歇时间。如果要求 $\tau > 0.5$ 的间歇运动, 可以采用多销外啮合槽轮机构, 其销数 k 应满足式

$$k \leq 2z(z-2)$$

当 $z = 3$ 时, $k = 1 \sim 6$; 当 $z = 4$ 时, $k = 1 \sim 4$; 当 $z = 5$ 或 6 时, $k = 1 \sim 3$; 当 $z \geq 7$ 时, $k = 1 \sim 2$ 。

至于槽轮机构的中心距 a 和圆销半径 R 应按受力情况和实际机械所允许的空间安装尺寸来确定。

3. 万向联轴器

(1) 单万向联轴器

单万向联轴器由主动轴 1、从动轴 3、中间十字构件 2 及机架组成, 可用于轴夹角可变的两轴之间运动及动力的传递。

当两轴夹角为 β 时, 若主动轴 1 以等角速度 ω_1 回转, 则从动轴 3 的角速度 ω_3 将在一定范围内变化, 即

$$\omega_1 \cos \beta \leq \omega_3 \leq \omega_1 / \cos \beta$$

且变化幅度与两轴夹角 β 的大小有关。 β 越大, ω_3 的变化幅度越大, 故一般取 $\beta \leq 30^\circ$ 。

(2) 双万向联轴器

为了消除单万向联轴器中从动轴变速转动的缺点, 常采用由两个单万向联轴器形成的双万向联轴器。为了实现主、从动轴的角速度恒相等, 其结构必须满足以下条件:

- 1) 轴 1、3 和中间轴 M 必须位于同一平面内;
- 2) 主动轴 1、从动轴 3 与中间轴 M 的轴线之间的夹角相等;
- 3) 中间轴两端的叉面应位于同一平面内。

9.2.2 本章难点

本章的难点是熟练掌握几种常用机构的运动特性并合理使用这些运动特性。

9.3 典型例题分析及解题技巧

例 9-1 某自动机上一棘轮机构,棘爪往复摆动一次,棘轮转过 18° ,于是工件由一个工位转入另一个工位,已知棘轮的模数 $m = 8 \text{ mm}$,试计算该棘轮机构的主要几何尺寸。

【解题思路及技巧】

运用棘轮机构几何尺寸的计算公式。

【解题过程】

(1) 齿数 z

棘轮每次至少转过一个齿,又必须转过 18° (一个工位),故棘轮的最小齿数为

$$z_{\min} = \frac{360^\circ}{18^\circ} = 20$$

棘轮每次转过的角度应该等于每个齿所对中心角的整数倍,即

$$18^\circ = \frac{360^\circ}{z} K \quad (K = 1, 2, 3, \dots)$$

或

$$z = \frac{360^\circ}{18^\circ} K = 20K$$

齿数 z 的选择除满足运动要求外,尚需考虑轮齿强度、转位精度、总体结构所允许的尺寸等因素,这里取 $K = 2$,故选棘轮的齿数为

$$z = 20K = 20 \times 2 = 40$$

(2) 顶圆直径 d_a

$$d_a = mz = 8 \text{ mm} \times 40 = 320 \text{ mm}$$

(3) 周节 t (弧长)

$$t = \pi m$$

(4) 齿高 h 取 $h = 0.75m = 0.75 \times 8 \text{ mm} = 6 \text{ mm}$

- (5) 齿顶弦长 a 取 $a = m = 8 \text{ mm}$
- (6) 齿面倾斜角 β 取 $\beta = 15^\circ$
- (7) 齿根圆角半径 r_f 取 $r_f = 1.5 \text{ mm}$
- (8) 轮齿宽度 b $b = (1 \sim 4)m$, 取 $b = 16 \text{ mm}$
- (9) 工作面边长 h_1 取 $h_1 = 8 \text{ mm}$
- (10) 非工作面边长 a_1 取 $a_1 = 4 \text{ mm}$
- (11) 爪尖圆角半径 r_1 $r_1 = 2 \text{ mm}$
- (12) 齿形角 ψ_1 $\psi_1 = 60^\circ$
- (13) 棘爪长度 l $l = 2p = 2 \times 25.13 \text{ mm} = 50.26 \text{ mm}$
- (14) 齿槽夹角 ψ 选 $\psi = 60^\circ$

例 9-2 某装配自动线上有一工作台, 工作台要求有 6 个工位, 每个工位在工作台静止时间 $t_j = 10 \text{ s}$ 内完成装配工序。当采用外槽轮机构时, 试求:

- (1) 该槽轮机构的运动系数 τ ;
- (2) 装圆柱销的主动构件(主动拨盘)的转动角速度 ω ;
- (3) 槽轮的转位时间 t_d 。

【解题思路及技巧】

明确槽轮机构运动系数的定义和计算方法, 了解槽轮机构的运动过程。

【解题过程】

因为工作台要求有 6 个工位, 所以槽轮的槽数为 6, 即 $z = 6$ 。

- (1) 槽轮机构的运动系数 τ

设一个运动循环的时间为 t , 由槽轮机构运动系数的计算公式得

$$\tau = t_d / t = (t - t_j) / t = 1/2 - 1/z = 1/2 - 1/6 = 1/3$$

- (2) 主动构件的转动角速度 ω

由上式得 $t_j = t(1 - 1/2 + 1/z) = (2\pi/\omega)(1/2 + 1/z)$

$$\omega = (2\pi/t_j)(1/2 + 1/z) = (2\pi/10) \times (1/2 + 1/6) \text{ rad/s} = 0.419 \text{ rad/s}$$

- (3) 槽轮转位时间

$$t_d = t - t_j = 2\pi/\omega - t_j = (2\pi/0.419 - 10) \text{ s} = 5 \text{ s}$$

例 9-3 在单万向联轴器中, 主动轴 1 以 $n_1 = 1000 \text{ r/min}$ 均匀转动, 从动轴 3 作匀速运动, 其最低转速 $n_{3\min} = 766 \text{ r/min}$ 。试求:

- (1) 主动轴与从动轴的夹角 β , 从动轴 3 的最高速度 $n_{3\max}$;
- (2) 在主动轴 1 转动一转过程中, φ_1 角为何值时两轴转速相等;
- (3) 从动轴的速度波动不均匀系数 δ 。

【解题思路及技巧】

运用单万向联轴器角速度之间的关系方程求解。

【解题过程】

$$(1) \text{ 因为 } n_3 = \frac{\cos \beta}{1 - \sin^2 \beta \cos^2 \varphi_1} n_1$$

当 $\varphi_1 = 90^\circ$, 即主动轴 1 的叉平面位于 1、3 两轴所在的垂直面内, n_3 最小, 有

$$n_{3\min} = n_1 \cos \beta$$

$$\text{则 } \beta = \arccos(n_{3\min}/n_1) = \arccos(766/1\,000) = 40^\circ$$

当 $\varphi_1 = 0^\circ$, 即主动轴 1 的叉平面位于 1、3 两轴所在平面内, n_3 最大, 有

$$n_{3\max} = n_1 / \cos \beta = 1\,000 / \cos 40^\circ \text{ r/min} = 1\,305.4 \text{ r/min}$$

(2) 当 $n_1 = n_3$ 即

$$\frac{\cos \beta}{1 - \sin^2 \beta \cos^2 \varphi_1} = 1$$

$$\text{解得 } \cos^2 \varphi_1 = \frac{1 - \cos \beta}{\sin^2 \beta} = \frac{1 - \cos \beta}{1 - \cos^2 \beta} = \frac{1}{1 + \cos \beta}$$

$$\varphi_1 = \arccos\left(\pm \sqrt{\frac{1}{1 + \cos \beta}}\right) = \arccos\left(\pm \sqrt{\frac{1}{1 + \cos 40^\circ}}\right)$$

当 $\varphi_1 = 42.941\,4^\circ$ 、 $137.058\,6^\circ$ 、 $222.941\,4^\circ$ 、 $317.058\,6^\circ$ 时两轴转速相等。

(3) 从动轴的速度波动不均系数 δ

$$\delta = \frac{n_{3\max} - n_{3\min}}{n_{3m}} = \frac{n_1 / \cos \beta - n_1 \cos \beta}{n_1} = 1 / \cos 40^\circ - \cos 40^\circ = 0.539\,4$$

9.4 习题解答

习题 9-1 偏心楔块式摩擦棘轮机构的偏心楔块是半径等于 50 mm 的圆弧, 中心距 $\overline{O_1 O_2} = 100 \text{ mm}$, 摩擦轮直径 $d_1 = 100 \text{ mm}$, 摩擦因数 $f = 0.1$ 。试按 $\alpha = 0.8\varphi$ 的条件确定偏心楔块的几何尺寸 (转动中心与圆弧中心间偏距 e , 转动中心到楔紧点距离 l)。

【解题思路及技巧】

运用偏心楔块式摩擦棘轮机构可靠性工作条件求解。

【解题过程】

如图 9-1 所示, 设摩擦轮半径为

$$r_1 = \frac{d_1}{2} = \frac{100}{2} \text{ mm} = 50 \text{ mm}$$

偏心楔块的半径为

$$R = 50 \text{ mm}$$

中心距为

$$L = O_1 O_2 = 100 \text{ mm}$$

(1) 求 α 角

由于

$$\tan \varphi = f = 0.1$$

$$\varphi = 5.71^\circ$$

$$\alpha = 0.8\varphi = 0.8 \times 5.71^\circ = 4.568^\circ$$

(2) 求角 δ_1 、 δ_2

根据正弦定理有

$$\frac{\sin \delta_2}{r_1} = \frac{\sin(180^\circ - \alpha)}{L}$$

$$\sin \delta_2 = \frac{r_1 \sin(180^\circ - \alpha)}{L} = \frac{50 \times \sin(180^\circ - 4.568^\circ)}{100} = 0.0398$$

$$\delta_2 = 2.282^\circ$$

$$\delta_1 = \alpha - \delta_2 = 4.568^\circ - 2.282^\circ = 2.286^\circ$$

(3) 求 l

根据正弦定理有

$$\frac{\sin \delta_2}{r_1} = \frac{\sin \delta_1}{l}$$

$$l = \frac{\sin \delta_1}{\sin \delta_2} r_1 = \frac{\sin 2.286^\circ}{\sin 2.282^\circ} \times 50 \text{ mm} = 50.088 \text{ mm}$$

(4) 求 e

$$e^2 = (R + r_1)^2 + L^2 - 2(R + r_1)L \cos \delta_1$$

$$= [(50 + 50)^2 + 100^2 - 2 \times (50 + 50) \times 100 \times \cos 2.286^\circ] \text{ mm}^2 = 15.917 \text{ mm}^2$$

$$e = \sqrt{15.917 \text{ mm}^2} = 4 \text{ mm}$$

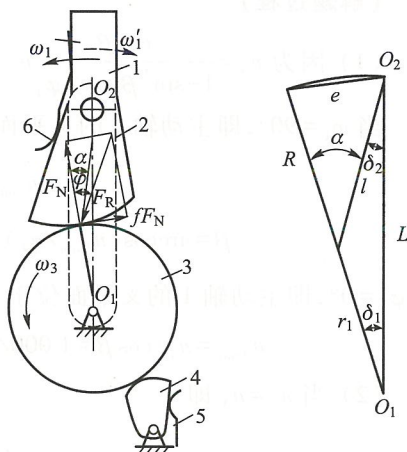


图 9-1

习题 9-2 外槽轮机构中, 已知主动拨盘等速回转, 槽轮槽数 $z=6$, 槽轮运动角 ψ' 与停歇角 ϕ' 之比 $\frac{\psi'}{\phi'}=2$ 。试求:

(1) 槽轮机构的运动系数 τ ;

(2) 圆销数 k 。

【解题思路及技巧】

明确槽轮机构的运动系数 τ 的概念。

【解题过程】

(1) 求槽轮机构的运动系数 τ

槽轮运动角为

$$\psi' = \pi - \frac{2\pi}{z} = \pi - \frac{2\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$$

槽轮停歇角为

$$\phi' = \frac{\psi'}{2} = \frac{\pi}{3}$$

$$\psi' + \phi' = \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \pi$$

主动拨盘转过一周时槽轮运动和停歇的次数为

$$\frac{2\pi}{\psi' + \phi'} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$$

主动拨盘转过一周时, 主动拨盘的运动时间为

$$t_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$$

其中, ω_1 为主动拨盘的角速度。

主动拨盘转过一周时, 槽轮的运动时间为

$$t_2 = \frac{2\psi'}{\omega_1} = \frac{4\pi}{3\omega_1}$$

槽轮机构的运动系数为

$$\tau = \frac{t_2}{t_1} = \frac{4\pi}{3\omega_1} \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{2}{3}$$

(2) 求圆销数 k

根据槽轮机构运动系数的计算公式有

$$\tau = k \frac{z-2}{2z} = k \frac{6-2}{2 \times 6} = k \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$k=2$$

习题 9-3 已知外槽轮机构的槽数 $z=8$, 主动拨盘的角速度 $\omega_1=10 \text{ rad/s}$ 。
试求:

- (1) 主动拨盘上圆销在什么位置时, 槽轮的角加速度 α_2 最大?
- (2) 槽轮的最大角加速度 $\alpha_{2\max}$ 。

【解题思路及技巧】

运用外槽轮机构角加速度方程求解。

【解题过程】

(1) 求槽轮角加速度最大时, 主动拨盘上圆销的位置。

槽轮角加速度的表达式为

$$\alpha_2 = \frac{\lambda(\lambda^2 - 1) \sin \varphi_1}{(1 - 2\lambda \cos \varphi_1 + \lambda^2)^2} \omega_1^2 \quad (\text{a})$$

角加速度对时间求导

$$\frac{d\alpha_2}{dt} = \lambda(\lambda^2 - 1) \omega_1^3 \frac{(1 - 2\lambda \cos \varphi_1 + \lambda^2) \cos \varphi_1 - 4\lambda \sin^2 \varphi_1}{(1 - 2\lambda \cos \varphi_1 + \lambda^2)^3}$$

当角加速度最大时, 有

$$\frac{d\alpha_2}{dt} = 0$$

即

$$(1 - 2\lambda \cos \varphi_1 + \lambda^2) \cos \varphi_1 - 4\lambda \sin^2 \varphi_1 = 0$$

整理得

$$2\lambda \cos^2 \varphi_1 + (1 + \lambda^2) \cos \varphi_1 - 4\lambda = 0$$

解该一元二次方程得

$$\cos \varphi_1 = \frac{-(1 + \lambda^2) \pm \sqrt{(1 + \lambda^2)^2 + 32\lambda^2}}{4\lambda}$$

取

$$\cos \varphi_1 = \frac{-(1 + \lambda^2) + \sqrt{(1 + \lambda^2)^2 + 32\lambda^2}}{4\lambda} \quad (\text{b})$$

由于

$$\lambda = \frac{R}{a} = \sin \frac{\pi}{z} = \sin \frac{\pi}{8} = 0.382\,683\,43 \quad (\text{c})$$

把式(c)代入式(b)得

$$\cos \varphi_1 = 0.851\ 338\ 1$$

$$\varphi_1 = \pm 31.64^\circ \quad (\text{d})$$

(2) 求槽轮的最大角加速度

把式(c)、(d)代入式(a)得槽轮的最大角加速度,当

$\varphi_1 = 31.64^\circ$ 时,

$$\alpha_{2\max} = \frac{\lambda(\lambda^2 - 1) \sin \varphi_1}{(1 - 2\lambda \cos \varphi_1 + \lambda^2)^2} \omega_1^2 = -70 \text{ rad/s}^2$$

$\varphi_1 = -31.64^\circ$ 时,

$$\alpha_{2\max} = \frac{\lambda(\lambda^2 - 1) \sin \varphi_1}{(1 - 2\lambda \cos \varphi_1 + \lambda^2)^2} \omega_1^2 = 70 \text{ rad/s}^2$$

习题 9-4 设在有 n 个工位的自动机中,用不完全齿轮来实现工作台의 间歇转位运动,若主、从动齿轮的假想齿数(即补全的齿数)相等,试求从动轮运动时间 t_2 与停歇时间 t'_2 之比 $\frac{t_2}{t'_2}$ 为多少?

【解题思路及技巧】

明确不完全齿轮机构从动轮运动时间与停歇时间的概念。

【解题过程】

由于自动机的工作台有 n 个工位,所以工作台每转过 $\frac{2\pi}{n}$ 角度停歇一次。从动齿轮 2 的运动规律与工作台完全一样,如图 9-2 所示。

又由于主动齿轮 1 与从动齿轮 2 的假想齿数相等。这也就是说,当从动齿轮转过

$\frac{2\pi}{n}$ 角度时,主动齿轮 1 也转过相同的角度。

于是,从动齿轮 2 的运动时间为

$$t_2 = \frac{2\pi}{n} \frac{t_1}{2\pi} = \frac{t_1}{n}$$

式中: t_1 为主动齿轮 1 转过一周时所用的时间; n 为工作台의 工位수。

从动齿轮 2 的停歇时间为

$$t'_2 = \left(2\pi - \frac{2\pi}{n} \right) \frac{t_1}{2\pi} = \left(1 - \frac{1}{n} \right) t_1$$

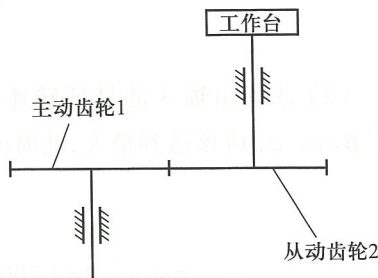


图 9-2

因而,有

$$\frac{t_2}{t_2'} = \frac{1}{n-1}$$

习题 9-5 在单万向联轴器中,轴 1 以 1 500 r/min 等速转动,轴 3 变速转动,其最高转速为 1 732 r/min。试求:

- (1) 轴 3 的最低转速;
- (2) 在轴 1 转一转中, φ_1 为哪些角度时两轴的转速相等?

【解题思路及技巧】

运用主动轴和从动轴角速度关系方程求解。

【解题过程】

- (1) 求输入轴 1 与输出轴 3 的夹角。万向联轴器传动比表达式为

$$\frac{\omega_3}{\omega_1} = \frac{\cos \beta}{1 - \sin^2 \beta \cos^2 \varphi_1} \quad (\text{a})$$

从式(a)可以看出,当 ω_3 达到最大时, $1 - \sin^2 \beta \cos^2 \varphi_1$ 应该达到最小,此时 $\cos^2 \varphi_1$ 达到最大,即

$$\cos^2 \varphi_1 = 1$$

因此

$$\omega_{3\max} = \frac{\cos \beta}{1 - \sin^2 \beta} \omega_1 = \frac{\cos \beta}{\cos^2 \beta} \omega_1 = \frac{\omega_1}{\cos \beta} = 1\,732 \text{ r/min}$$

$$\cos \beta = \frac{\omega_1}{\omega_{3\max}} = \frac{1\,500}{1\,732} = 0.866$$

$$\beta = 30^\circ$$

- (2) 求输出轴 3 的最低转速。从式(a)可以看出,当 ω_3 达到最小时, $1 - \sin^2 \beta \cos^2 \varphi_1$ 应该达到最大,此时 $\cos^2 \varphi_1$ 达到最小,即

$$\cos^2 \varphi_1 = 0$$

则

$$\omega_{3\min} = \omega_1 \cos \beta = 1\,500 \text{ r/min} \times \cos 30^\circ = 1\,299.038 \text{ r/min}$$

- (3) 求输入轴 1 转一转中,输入轴与输出轴转速相等时输入轴 1 的转角。从本题式(a)可以看出,当 ω_1 与 ω_3 相等时,应该有

$$\frac{\cos \beta}{1 - \sin^2 \beta \cos^2 \varphi_1} = 1$$

由此可以得到

$$\cos^2 \varphi_1 = \frac{1 - \cos \beta}{\sin^2 \beta} = \frac{1 - \cos \beta}{1 - \cos^2 \beta} = \frac{1}{1 + \cos \beta}$$

$$\cos \varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \cos \beta}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \cos 30^\circ}} = 0.732\ 05$$

由此可以得到输入轴 1 与输出轴 3 转速相等时,输入轴 1 的转角为

$$\varphi_1^{(1)} = 42.941\ 4^\circ$$

$$\varphi_1^{(2)} = 180^\circ - 42.94^\circ = 137.06^\circ$$

$$\varphi_1^{(3)} = 180^\circ + 42.94^\circ = 222.94^\circ$$

$$\varphi_1^{(4)} = 360^\circ - 42.94^\circ = 317.06^\circ$$

第十章 机械的运转及其速度波动的调节

10.1 基本要求

1. 了解机械运转过程的三个阶段及特征;
2. 掌握确定机械系统的等效质量、等效转动惯量、等效力和等效力矩的方法;
3. 掌握建立单自由度机械系统的等效动力学模型的基本思路及建立运动方程式的方法及其求解方法;
4. 掌握机械周期性速度波动的平均角速度、速度不均匀系数和最大盈亏功的基本概念及计算方法;
5. 掌握飞轮转动惯量的计算方法及飞轮几何尺寸的确定;
6. 了解机械非周期性速度波动的调节方法。

10.2 重点及难点解析

10.2.1 本章重点

1. 机械系统动力学模型的建立及求解

(1) 机械系统等效动力学模型

为了简化机械系统求解过程,取一个转动构件或移动构件,假想它具有等效转动惯量或等效质量,其上作用有等效力矩或等效力,这个构件称为等效构件。对于单自由度机械系统,以等效构件建立的动力学模型称为等效动力学模型。等效原则是等效构件所具有的动能等于原机械系统的动能,其上作用的力或力矩的瞬时功率等于作用在原机械系统上的所有外力(力矩)在同一瞬时功率的代数和。该等效构件的转动惯量(质量)称为等效转动惯量(等效质量);作用在此等效构件上的力(矩)称为等效力(矩)。

(2) 机械运动方程式的求解

建立等效动力学模型后,如其等效力矩用 M_e 表示,等效转动惯量用 J_e 表示,则该机械系统的运动方程式简化为

$$d(J_e \omega^2 / 2) = M_e \omega dt = M_e d\varphi \quad (10-1)$$

对上式进行推演,可得力矩形式的机械运动方程式为

$$J_e \frac{d\omega}{dt} + \frac{\omega^2}{2} \frac{dJ_e}{d\varphi} = M_e \quad (10-2)$$

动能形式的机械运动方程式为

$$\frac{1}{2} J_e \omega^2 - \frac{1}{2} J_{e0} \omega_0^2 = \int_{\varphi_0}^{\varphi} M_e d\varphi \quad (10-3)$$

对于不同的机械系统,等效转动惯量是机构位置的函数(或常数),而等效力矩可能是机构位置、速度或时间的函数。求解时,可视具体情况,利用式(10-1)、式(10-2)或式(10-3)进行求解。

若等效力矩 M_e = 常数,等效转动惯量 J_e = 常数,则由式(10-2)得

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{M_e}{J_e} \quad (10-4)$$

如果已知初始条件为当 $t = t_0$ 时, $\varphi = \varphi_0$, $\omega = \omega_0$, 则得

$$\omega = \omega_0 + \alpha t \quad (10-5)$$

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 \quad (10-6)$$

2. 机械运转的速度波动及其调节方法

(1) 机械运转速度波动的原因

作用在机械上的驱动力(力矩)和阻力矩(力矩)通常是变化的,在某一瞬时,其所做的驱动功与阻抗功一般是不相等的,即出现盈功或亏功,从而使机械的速度增加或减小,产生速度的波动。

若等效驱动力矩 M_d 和等效阻力矩 M_r 的变化是周期性的,在 M_d 、 M_r 和等效转动惯量 J_e 变化的公共周期内,驱动功等于阻抗功,机械动能增量为零,则等效构件的角速度在公共周期的始末是相等的,机械运转的速度波动将呈现周期性。

若等效驱动力矩 M_d 和等效阻力矩 M_r 的变化是非周期性的,则机械运转的速度波动将呈现非周期性。

(2) 机械运转速度波动的调节

对于周期性速度波动,在等效力矩一定的情况下,加大等效构件的转动惯量,将会使等效构件的角加速度减小,可以使机械的运转趋于均匀。因此,对于周期性速度波动,可以通过安装具有很大转动惯量的回转构件——飞轮来调节速度波动。

对于非周期性速度波动,调节速度波动的方法就是设法使等效驱动力矩 M_d 和等效阻力矩 M_r 恢复平衡关系。对于选用电动机作为原动机的机械,其本身有自调性,即其本身就可以使驱动力矩和工作阻力矩协调一致,能自动重新建立能

量平衡关系;而对于以蒸汽机、内燃机等为原动机的机械,其调节非周期性速度波动的方法是安装调速器。

(3) 飞轮转动惯量的计算

机械周期性速度波动的程度可用机械运转速度不均匀系数 δ 来表示,其定义为角速度波动的幅度 $\omega_{\max} - \omega_{\min}$ 与平均角速度 ω_m 之比,即

$$\delta = (\omega_{\max} - \omega_{\min}) / \omega_m$$

式中,平均角速度 $\omega_m = (\omega_{\max} + \omega_{\min}) / 2$ 。

设计时,应使 δ 小于其许用值,即 $\delta \leq [\delta]$ 。为此所需的飞轮转动惯量为

$$J_F \geq \Delta W_{\max} / \omega_m^2 [\delta] - J_e$$

若 J_e 忽略不计,则有

$$J_F \geq \Delta W_{\max} / \omega_m^2 [\delta] = 900 \Delta W_{\max} / \pi^2 n^2 [\delta]$$

式中:最大盈亏功 $\Delta W_{\max} = E_{\max} - E_{\min}$; n 为转速, r/min。

10.2.2 本章难点

1. 等效转动惯量、等效力矩、等效质量和等效力矩的概念及求解方法;
2. 最大盈亏功 $\Delta W_{\max}$ 的概念和求解方法。

最大盈亏功 $\Delta W_{\max}$ 是指机械系统在一个运动循环中动能变化的最大差值,其大小往往不等于系统盈功或亏功的最大值,可根据能量指示图确定。

10.3 典型例题分析及解题技巧

例 10-1 图 10-1 所示的行星轮系中,已知各轮的齿数为 $z_1 = z_2 = 20$, $z_3 = 60$,各构件的质心均在其相对回转轴线上,转动惯量为 $J_1 = J_2 = 0.01 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, $J_H = 0.16 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$,行星轮 2 的质量 $m_2 = 2 \text{ kg}$,模数 $m = 10 \text{ mm}$,作用在行星架 H 上的力矩 $M_H = 40 \text{ N} \cdot \text{m}$ 。求构件 1 为等效构件时的等效力矩 M_e 和等效转动惯量 J_e 。

【解题思路及技巧】

- (1) 计算行星轮系的传动比;
- (2) 根据等效原则计算等效转动惯量和等效力矩;
- (3) 行星轮的动能等于其质心的移动动能和绕质心转动的动能之和。

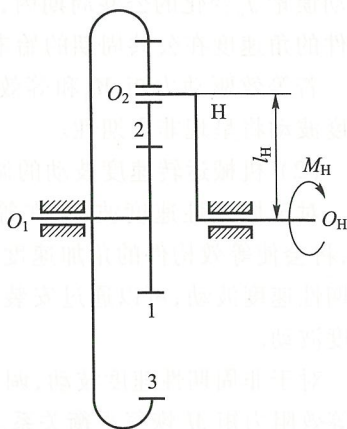


图 10-1

【解题过程】

(1) 求等效力矩

根据功率等效的原则有

$$M_e = M_H \frac{\omega_H}{\omega_1} \quad (\text{a})$$

在该行星轮系中, $\omega_3 = 0$, 则其转化机构的传动比为

$$i_{13}^H = \frac{\omega_1 - \omega_H}{0 - \omega_H} = 1 - \frac{\omega_1}{\omega_H} = -\frac{z_3}{z_1} = -\frac{60}{20} = -3$$

$$\text{则} \quad \frac{\omega_1}{\omega_H} = 1 + 3 = 4, \text{ 即 } \frac{\omega_H}{\omega_1} = \frac{1}{4} \quad (\text{b})$$

将式(b)代入式(a)得

$$M_e = 40 \text{ N} \cdot \text{m} \times \frac{1}{4} = 10 \text{ N} \cdot \text{m}$$

求得 M_e 为正值, 表明其方向与 M_H 相同。

(2) 求等效转动惯量 J_e

在轮系中, 齿轮 1 与系杆 H 为定轴转动构件, 而齿轮 2 为平面运动构件, 因而在求 J_e 的计算公式中, 齿轮 2 的动能等于质心的移动动能和绕质心转动的动能之和。故得:

$$J_e = J_1 \left(\frac{\omega_1}{\omega_1} \right)^2 + J_2 \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 + m_2 \left(\frac{v_{02}}{\omega_1} \right)^2 + J_H \left(\frac{\omega_H}{\omega_1} \right)^2 = J_1 + (m_2 l_H^2 + J_H) \left(\frac{\omega_H}{\omega_1} \right)^2 + J_2 \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 \quad (\text{c})$$

其中, $v_{02} = \omega_H \cdot l_H$ 。

式中, $\frac{\omega_H}{\omega_1} = \frac{1}{4}$ 已经求出。又因

$$i_{23}^H = \frac{\omega_2 - \omega_H}{0 - \omega_H} = 1 - \frac{\omega_2}{\omega_H} = \frac{z_3}{z_2} = \frac{60}{20} = 3$$

$$\text{故 } \frac{\omega_2}{\omega_H} = -2, \text{ 因此 } \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\omega_2}{\omega_H} \frac{\omega_H}{\omega_1} = -2 \times \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{又} \quad l_H = \left(\frac{z_1 + z_2}{2} \right) m = \left(\frac{20 + 20}{2} \right) \times 10 \text{ mm} = 200 \text{ mm}$$

将以上各值代入式(c)得

$$J_e = \left[0.01 + (2 \times 0.2^2 + 0.16) \times \left(\frac{1}{4} \right)^2 + 0.01 \times \left(-\frac{1}{2} \right)^2 \right] \text{kg} \cdot \text{m}^2 = 0.0225 \text{kg} \cdot \text{m}^2$$

例 10-2 某机械稳定运转时, 它的一个循环对应于 A 轴一转, 切向阻力 F_r 变化如图 10-2a 所示, 切向驱动力 F_d 在稳定运转的整个循环中为常数, 点 B 的平均线速度 $v_m = 2.5 \text{ m/s}$, 曲柄长度 $L_{AB} = 100 \text{ mm}$ 。求当运转速度不均匀系数 $\delta \leq 0.05$ 时, 所需装在 A 轴上的飞轮转动惯量 J_F ; 又飞轮的平均直径 $D = 500 \text{ mm}$, 问装在 A 轴上的飞轮质量 Q_F 。

【解题思路及技巧】

首先根据在一个运动循环内, 等效驱动力所作的功应等于等效阻力矩所作的功, 计算驱动力 F_d , 然后计算最大盈亏功和飞轮转动惯量。

【解题过程】

由题知机械稳定运转的一个循环对应于 A 轴的一转, 则

$$X = \pi L_{AB} = 3.14 \times 0.1 \text{ m} = 0.314 \text{ m}$$

式中, $2X$ 是点 B 轨迹圆的周长。

$$2X = 2\pi L_{AB}$$

(1) 驱动力 F_d

如图 10-2b 所示, 因在机械稳定运转的一个运动循环内, 等效驱动力所作的功应等于等效阻力矩所作的功, 即:

$$\begin{aligned} W_d = W_r &= \left(\frac{X}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{X}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{X}{2} \right) \times 10\,000 \\ &= 10\,000X = 10\,000 \text{ N} \times 0.314 \text{ m} = 3\,140 \text{ N} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

$$\text{又 } W_d = 2XF_d$$

$$F_d = \frac{W_d}{2X} = \frac{W_r}{2X} = \frac{3\,140 \text{ N} \cdot \text{m}}{2 \times 0.314 \text{ m}} = 5\,000 \text{ N}$$

(2) 最大盈亏功 $\Delta W_{\max}$

画驱动力曲线如图 10-2b 所示。计算各阶段的盈亏功如下:

$$\Delta W_1 = \frac{1}{2} \times \frac{X}{4} F_d = \frac{1}{2} \times \frac{0.314 \text{ m}}{4} \times 5\,000 \text{ N} = 196.25 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$\Delta W_2 = -\frac{1}{2} \times \frac{X}{2} F_d = -\frac{1}{2} \times \frac{0.314 \text{ m}}{2} \times 5\,000 \text{ N} = -392.5 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$\Delta W_3 = \frac{1}{2} \times \frac{3X}{8} F_d = \frac{1}{2} \times \frac{3}{8} \times 0.314 \text{ m} \times 5\,000 \text{ N} = 294.375 \text{ N} \cdot \text{m}$$

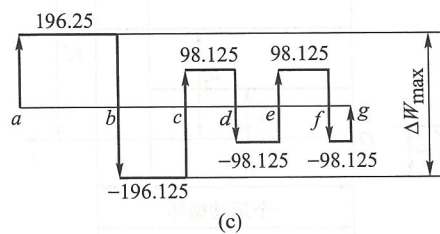
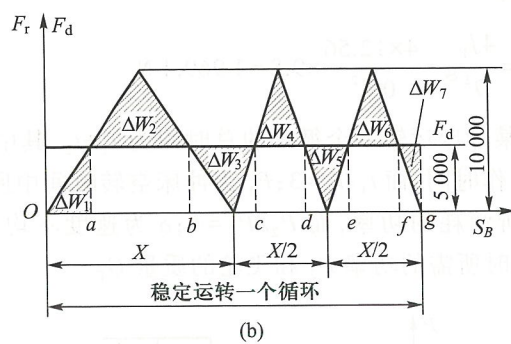
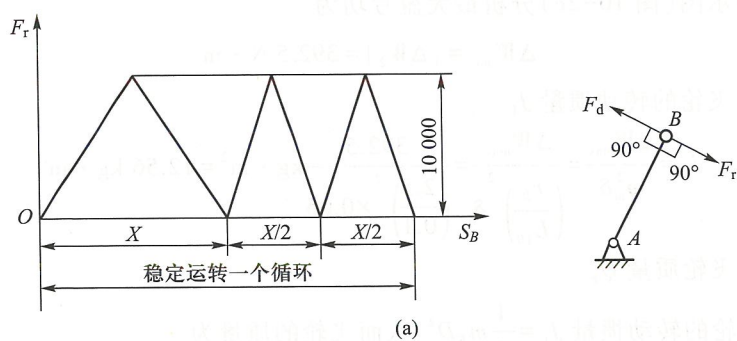


图 10-2

$$\Delta W_4 = -\frac{1}{2} \frac{X}{4} F_d = -\frac{1}{2} \times \frac{0.314 \text{ m}}{4} \times 5000 \text{ N} = -196.25 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$\Delta W_5 = \frac{1}{2} \frac{X}{4} F_d = \frac{1}{2} \times \frac{0.314 \text{ m}}{4} \times 5000 \text{ N} = 196.25 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$\Delta W_6 = -\frac{1}{2} \times \frac{X}{4} \times 5000 = -196.25 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$\Delta W_7 = \frac{1}{2} \frac{X}{8} F_d = \frac{1}{2} \times \frac{0.314 \text{ m}}{8} \times 5000 \text{ N} = 98.125 \text{ N} \cdot \text{m}$$

由能量指示图(图 10-2c)分析最大盈亏功为

$$\Delta W_{\max} = |\Delta W_2| = 392.5 \text{ N} \cdot \text{m}$$

(3) 飞轮的转动惯量 J_F

$$J_F = \frac{\Delta W_{\max}}{\omega_m^2 \delta} = \frac{\Delta W_{\max}}{\left(\frac{v_B}{L_{AB}}\right)^2 \delta} = \frac{392.5}{\left(\frac{2.5}{0.1}\right)^2 \times 0.05} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 = 12.56 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

(4) 飞轮质量 Q_F

因飞轮的转动惯量 $J_F = \frac{1}{4} m_F D^2$, 从而飞轮的质量为

$$Q_F = m_F g = \frac{4J_F}{D^2} g = \frac{4 \times 12.56}{0.5^2} \times 9.8 = 1969.4 \text{ N}$$

例 10-3 图 10-3 所示某冲床运转一个循环的总时间为 $t_1 + t_2$, 其中 t_1 为冲床的空转时间, t_2 为冲床的工作时间, 而 $t_1/t_2 = 3$; P_1 为冲床空转时间中所消耗的功率, P_2 为冲床工作时间中所消耗的功率, 而 $P_2/P_1 = 6$; δ 为速度不均匀系数。求该冲床的马达功率 P , 冲孔时所需的功率 P_2 和飞轮的质量 Q_F 。

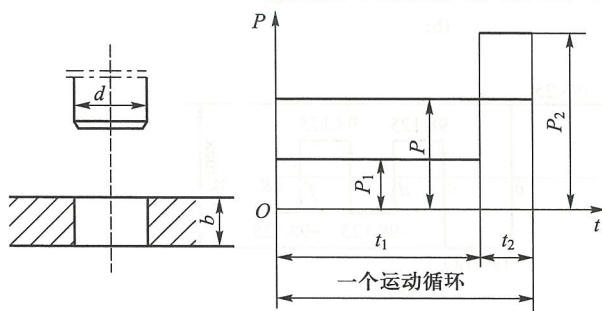


图 10-3

【解题思路及技巧】

运用飞轮调节周期性速度波动的原理。

【解题过程】

(1) 马达的功率 P

1) 在空转时间(即不冲压零件时)内, 马达所供给的功率除了维持空转时所消耗的功率 P_1 外, 就是增加飞轮的转速, 这是飞轮积蓄的动能, 即

$$75Pt_1 = 75P_1t_1 + \frac{1}{2}J_F(\omega_{\max}^2 - \omega_{\min}^2)$$

或

$$\frac{1}{2}J_F(\omega_{\max}^2 - \omega_{\min}^2) = 75t_1(P - P_1)$$

$$75t_1(P - P_1) = \text{盈功}$$

2) 在工作时间(即冲压零件时)内,工作所需的功率 P_2 大于马达所供给的功率,因此飞轮的转速降低,把原来所积蓄的动能释放出来,即

$$75P_2t_2 = 75Pt_2 + \frac{1}{2}J_F(\omega_{\max}^2 - \omega_{\min}^2)$$

或

$$\frac{1}{2}J_F(\omega_{\max}^2 - \omega_{\min}^2) = 75t_2(P_2 - P)$$

$$75t_2(P_2 - P) = \text{亏功}$$

3) 一个工作循环内,盈功等于亏功

$$75t_1(P - P_1) = 75t_2(P_2 - P)$$

故

$$P = \frac{P_1t_1 + P_2t_2}{t_1 + t_2}$$

将 $\frac{t_1}{t_2} = 3, \frac{P_2}{P_1} = 6$ 代入上式得

$$P = \frac{P_1t_1 + P_2t_2}{t_1 + t_2} = \frac{(P_1t_1)/P_2t_2 + 1}{t_1/(P_2t_2) + t_2/(P_2t_2)} = \frac{\frac{3}{6} + 1}{\frac{3}{3+1} + 1} = \frac{3}{8}P_2$$

由此可见,冲床用了飞轮后,马达的功率 P 只需要冲压零件时所需功率 P_2 的 $3/8$ 就够了。

(2) 冲孔时所需的功率 P_2

冲孔时所作的功为 $P_2t_2 = \frac{1}{2}P_{\max}b$ (理论上的数值)

而

$$P_{\max} = \pi db\tau$$

式中: d 为冲孔直径, mm; b 为被冲孔零件的厚度, mm; τ 为材料的切应力, N/mm²。

$$P_2 = \pi db^2\tau / (2t_2)$$

(3) 飞轮的质量 Q_F

$$Q_F = m_F g = \frac{4gJ_F}{D^2} g$$

而 $J_F = \frac{\Delta W}{\omega_m^2 \delta}$, 又因 $\Delta W = 75t_2(P_2 - P)$, $\omega_m = \frac{\pi n}{30}$, 则

$$Q_F = \frac{4J_F}{D^2} g = \frac{4 \times 75 t_2 (P_2 - P)}{D^2 \left(\frac{\pi n}{30} \right)^2 \delta} g = \frac{27\,000 t_2 (P_2 - P)}{D^2 \pi^2 n^2 \delta} g$$

选取适当的飞轮直径 D 后,即可确定 Q_F 值,然后设计飞轮的其他结构尺寸。

10.4 习题解答

习题 10-1 图 10-4 所示减速器中,已知各轮的齿数 $z_1 = z_3 = 25$, $z_2 = z_4 = 50$, 各轮的转动惯量 $J_1 = J_3 = 0.04 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, $J_2 = J_4 = 0.16 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ (忽略各轴的转动惯量),作用在轴 III 上的阻力矩 $M_3 = 100 \text{ N} \cdot \text{m}$ 。试求选取 I 轴为等效构件时,该机构的等效转动惯量 J_e 和等效阻力矩 M_r 。

【解题思路及技巧】

根据等效原则计算等效转动惯量和等效力矩。

【解题过程】

(1) 求等效转动惯量

根据等效转动惯量的计算方法

$$J = \sum_{i=1}^n J_i \left(\frac{\omega_i}{\omega} \right)^2$$

则

$$J_e = J_1 \left(\frac{\omega_1}{\omega_1} \right)^2 + J_2 \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 + J_3 \left(\frac{\omega_3}{\omega_1} \right)^2 + J_4 \left(\frac{\omega_4}{\omega_1} \right)^2$$

$$\frac{\omega_1}{\omega_1} = 1$$

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{z_1}{z_2} = \frac{25}{50} = 0.5$$

$$\frac{\omega_3}{\omega_1} = \frac{z_1}{z_2} = \frac{25}{50} = 0.5$$

$$\frac{\omega_4}{\omega_1} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{z_3}{z_4} = \frac{25}{50} \times \frac{25}{50} = 0.25$$

$$J_e = (0.04 + 0.16 \times 0.5^2 + 0.04 \times 0.5^2 + 0.16 \times 0.25^2) \text{ kg} \cdot \text{m}^2 = 0.1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

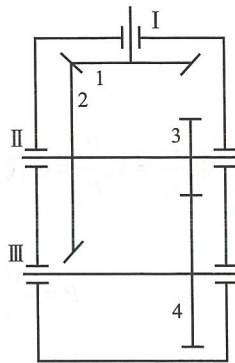


图 10-4

(2) 求等效阻力矩

根据等效力矩的计算方法

$$M_r = \sum_{i=1}^n \pm M_i \left(\frac{\omega_i}{\omega} \right)$$

则

$$M_r = -M_3 \left(\frac{\omega_4}{\omega_1} \right) = -M_3 \frac{z_1 z_3}{z_2 z_4} = -100 \text{ N} \cdot \text{m} \times \frac{25}{50} \times \frac{25}{50} = -25 \text{ N} \cdot \text{m}$$

习题 10-2 设某机械由交流异步电动机驱动。电动机的额定角速度 $\omega_n = 151.8 \text{ rad/s}$, 同步角速度 $\omega_0 = 157.1 \text{ rad/s}$, 额定转矩 $M_n = 52.7 \text{ N} \cdot \text{m}$ 。已知等效阻力矩 $M_r = 50 \text{ N} \cdot \text{m}$ (以电动机轴为等效构件), 试求该机械稳定运转时的角速度 ω 。

【解题思路及技巧】

根据等效驱动力矩与等效阻力矩在一个周期内做功相等, 计算出等效驱动力, 然后利用交流异步电动机的驱动力矩特性方程, 计算机械稳定运转时的角速度 ω 。

【解题过程】

交流异步电动机的驱动力矩为

$$M_d = \frac{M_n}{\omega_0 - \omega_n} (\omega_0 - \omega)$$

当机械稳定运转时, 一个周期内, 驱动力矩做功等于阻力矩做功, 即

$$\int_0^T M_d d\varphi = \int_0^T M_r d\varphi$$

由于 M_d 和 M_r 都是与变量 φ 无关的量, 因此有

$$M_d T = M_r T$$

$$M_d = M_r$$

式中, T 为机械工作的周期。

于是有

$$M_d = \frac{M_n}{\omega_0 - \omega_n} (\omega_0 - \omega) = M_r$$

机械稳定运转时的角速度为

$$\omega = \omega_0 - \frac{M_r (\omega_0 - \omega_n)}{M_n} = 157.1 \text{ rad/s} - \frac{50 \times (157.1 - 151.8)}{52.7} \text{ rad/s} = 152.0715 \text{ rad/s}$$

习题 10-3 已知某机械主轴与制动器直接相连, 以主轴为等效构件时, 机

械的等效转动惯量 $J = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, 设主轴的稳定运转角速度为 $\omega_s = 150 \text{ rad/s}$, 求要在 3 s 内实现制动时, 制动器的制动力矩。

【解题思路及技巧】

机械主轴制动时没有驱动力矩, 只有阻力矩, 且阻力矩可设为常数; 利用力矩形式的运动方程求解。

【解题过程】

设制动力矩 M_r 为常数。机械运转时, 在任一时间间隔 dt 内, 所有外力所作的元功 dW 应等于机械系统动能的增量 dE , 即

$$dW = dE$$

$$dE = d\left(\frac{1}{2}J\omega^2\right)$$

$$dW = M_r d\varphi$$

$$d\left(\frac{1}{2}J\omega^2\right) = M_r d\varphi$$

$$J\omega \frac{d\omega}{d\varphi} = M_r$$

$$J\omega \frac{d\omega}{d\varphi} = J\omega \frac{d\omega}{dt} \frac{dt}{d\varphi} = M_r$$

由于

$$\frac{dt}{d\varphi} = \frac{1}{\frac{d\varphi}{dt}} = \frac{1}{\omega}$$

所以

$$J \frac{d\omega}{dt} = M_r$$

$$J d\omega = M_r dt$$

$$\int_{150}^0 J d\omega = \int_0^3 M_r dt$$

$$-150J = 3M_r$$

$$M_r = \frac{-150J}{3} = \frac{-150 \times 1}{3} \text{ N} \cdot \text{m} = -50 \text{ N} \cdot \text{m}$$

习题 10-4 已知某机械稳定运转时的等效驱动力矩和等效阻力矩如

图 10-5 所示。机械的等效转动惯量为 $J = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, 等效驱动力矩为 $M_d = 30 \text{ N} \cdot \text{m}$, 机械稳定运转开始时等效构件的角速度 $\omega_0 = 25 \text{ rad/s}$, 试确定:

(1) 等效构件的稳定运动规律 $\omega(\varphi)$;

(2) 速度不均匀系数 δ ;

(3) 最大盈亏功 $\Delta W_{\max}$;

(4) 若要求 $[\delta] = 0.05$, 求飞轮的等效转动惯量 J_F 。

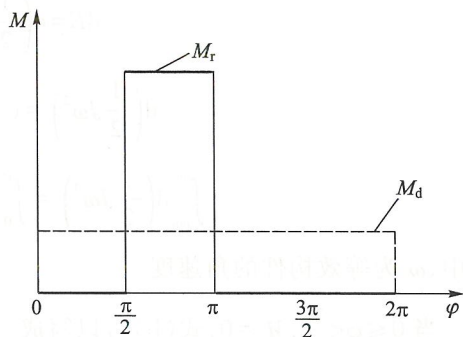


图 10-5

【解题思路及技巧】

利用力矩形式的运动方程分段积分可得等效构件的稳定运动规律, 进而确定 $\omega_{\min}$ 和 $\omega_{\max}$ 及其发生的位置。

【解题过程】

(1) 求等效构件的稳定运动规律 $\omega(\varphi)$

当机械处于稳定运转时, 驱动力矩对机械系统做功和阻力矩对机械系统做功相等, 即

$$\int_0^{2\pi} M_d d\varphi = \int_0^{2\pi} M_r d\varphi \quad (\text{a})$$

由于 $0 < \varphi < 2\pi$ 时

$$M_d = 30 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M_r = \begin{cases} 0, & 0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2} \\ \text{常数}, & \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi \\ 0, & \pi < \varphi \leq 2\pi \end{cases}$$

所以, 式(a)积分后得

$$2\pi M_d = \frac{\pi}{2} M_r$$

$$M_r = 4M_d = 120 \text{ N} \cdot \text{m}$$

机械运转时, 在任一时间间隔 dt 内, 所有外力所作的元功 dW 应等于机械系统动能的增量 dE , 即

$$dW = dE$$

$$dW = (M_d - M_r) d\varphi$$

$$dE = d\left(\frac{1}{2}J\omega^2\right)$$

$$d\left(\frac{1}{2}J\omega^2\right) = (M_d - M_r) d\varphi$$

$$\int_{\omega_0}^{\omega} d\left(\frac{1}{2}J\omega^2\right) = \int_0^{\varphi} (M_d - M_r) d\varphi \quad (b)$$

式中, ω 为等效构件的角速度。

当 $0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$, $M_r = 0$, 式(b)可以写成

$$\int_{\omega_0}^{\omega} d\left(\frac{1}{2}J\omega^2\right) = \int_0^{\varphi} M_d d\varphi$$

积分得

$$\frac{1}{2}J\omega^2 - \frac{1}{2}J\omega_0^2 = \varphi M_d$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{2\varphi M_d}{J}} = \sqrt{25^2 + 60\varphi} = \sqrt{625 + 60\varphi}$$

当 $\varphi = \frac{\pi}{2}$ 时等效构件的角速度为

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{\pi M_d}{J}} = \sqrt{25^2 + 30\pi} \text{ rad/s} = 26.82 \text{ rad/s}$$

当 $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$, $M_r \neq 0$, 式(b)可以写成

$$\int_{\omega_1}^{\omega} d\left(\frac{1}{2}J\omega^2\right) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi} (M_d - M_r) d\varphi$$

积分得

$$\frac{1}{2}J\omega^2 - \frac{1}{2}J\omega_1^2 = \left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) (M_d - M_r)$$

$$\begin{aligned} \omega &= \sqrt{\omega_1^2 + \frac{(2\varphi - \pi)(M_d - M_r)}{J}} = \sqrt{26.82^2 + (2\varphi - \pi) \times (30 - 120)} \\ &= \sqrt{1\,002.06 - 180\varphi} \end{aligned}$$

当 $\varphi = \pi$ 时, 等效构件的角速度为

$$\omega_2 = \sqrt{\omega_1^2 + \frac{\pi(M_d - M_r)}{J}} = \sqrt{26.82^2 + \pi(30 - 120)} \text{ rad/s} = 20.90 \text{ rad/s}$$

当 $\pi < \varphi \leq 2\pi$, $M_r = 0$, 式(b)可以写成

$$\int_{\omega_2}^{\omega} d\left(\frac{1}{2}J\omega^2\right) = \int_{\pi}^{\varphi} M_d d\varphi$$

积分得

$$\frac{1}{2}J\omega^2 - \frac{1}{2}J\omega_2^2 = (\varphi - \pi)M_d$$

$$\omega = \sqrt{\omega_2^2 + \frac{2(\varphi - \pi)M_d}{J}} = \sqrt{20.90^2 + 60(\varphi - \pi)} = \sqrt{248.31 + 60\varphi}$$

当 $\varphi = 2\pi$ 时等效构件的角速度为

$$\omega_3 = \sqrt{\omega_2^2 + \frac{2\pi M_d}{J}} = \sqrt{20.90^2 + 60\pi} \text{ rad/s} = 25 \text{ rad/s}$$

等效构件的稳定运动规律为

$$\omega(\varphi) = \begin{cases} \sqrt{625 + 60\varphi} & 0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2} \\ \sqrt{1\,002.06 - 180\varphi} & \frac{\pi}{2} < \varphi < \pi \\ \sqrt{248.31 + 60\varphi} & \pi < \varphi \leq 2\pi \end{cases}$$

(2) 求速度不均匀系数 δ

速度不均匀系数的表达式为

$$\delta = \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\omega_m}$$

平均角速度的表达式为

$$\omega_m = \frac{\int_0^{\varphi_T} \omega d\varphi}{\varphi_T}$$

$$\omega_m = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{625 + 60\varphi} d\varphi + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sqrt{1\,002.06 - 180\varphi} d\varphi + \int_{\pi}^{2\pi} \sqrt{248.31 + 60\varphi} d\varphi}{2\pi}$$

工程中,通常用下式近似计算平均角速度:

$$\omega_m \approx \frac{\omega_{\min} + \omega_{\max}}{2}$$

通过分析等效构件的运动规律可得

$$\omega_{\min} = \omega_2 = 20.90 \text{ rad/s}$$

$$\omega_{\max} = \omega_1 = 26.82 \text{ rad/s}$$

$$\omega_m \approx \frac{\omega_{\min} + \omega_{\max}}{2} = \frac{20.90 + 26.82}{2} \text{ rad/s} = 23.86 \text{ rad/s}$$

于是,速度不均匀系数为

$$\delta = \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\omega_m} = \frac{26.82 - 20.90}{23.86} = 0.248$$

(3) 求最大盈亏功 $\Delta W_{\max}$

最大盈亏功的计算表达式为

$$\Delta W_{\max} = E_{\max} - E_{\min} = \frac{1}{2} J \omega_{\max}^2 - \frac{1}{2} J \omega_{\min}^2$$

$$\Delta W_{\max} = \frac{1}{2} J (\omega_{\max}^2 - \omega_{\min}^2) = \frac{1}{2} \times 1 \times (26.82^2 - 20.90^2) \text{ N} \cdot \text{m} = 141.25 \text{ N} \cdot \text{m}$$

(4) 求当 $[\delta] = 0.05$ 时,飞轮的等效转动惯量 J_F

飞轮的等效转动惯量为

$$J_F = \frac{\Delta W_{\max}}{\omega_m^2 [\delta]} - J = \frac{141.25}{0.05 \times 23.86^2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 - 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 = 3.96 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

习题 10-5 图 10-6 所示齿轮机构中,齿轮的齿数分别为 $z_1 = 20, z_2 = 40$, 齿轮的转动惯量 $J_1 = 0.01 \text{ kg} \cdot \text{m}^2, J_2 = 0.02 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, 作用在齿轮 1 上的力矩 $M_1 = 10 \text{ N} \cdot \text{m}$, 齿轮 2 上的阻力矩为零。设齿轮 2 上的角加速度为常数, 试求齿轮 2 从角速度 $(\omega_2)_0 = 0$ 上升到 $(\omega_2)_t = 100 \text{ rad/s}$ 时所需的时间 t 。

【解题思路及技巧】

该齿轮机构的等效转动惯量是常数, 等效力矩也是常数, 因而等效构件作等加速度运动。

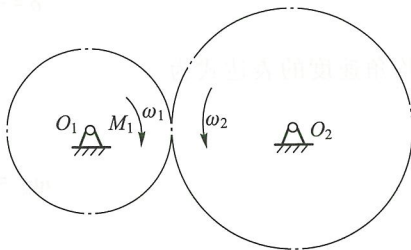


图 10-6

【解题过程】

选择齿轮 2 为等效构件。

(1) 求等效转动惯量 J

$$J = J_1 \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} + J_2 = J_1 \left(\frac{z_2}{z_1} \right)^2 + J_2 = \left[0.01 \times \left(\frac{40}{20} \right)^2 + 0.02 \right] \text{ kg} \cdot \text{m}^2 = 0.06 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

(2) 求等效驱动力矩 M_d

$$M_d = M_1 \frac{\omega_1}{\omega_2} = M_1 \frac{z_2}{z_1} = 10 \text{ N} \cdot \text{m} \times \frac{40}{20} = 20 \text{ N} \cdot \text{m}$$

(3) 等效构件的角加速度为

$$\varepsilon = \frac{M_d}{J} = \frac{20}{0.06} \text{ rad/s}^2 = 333.333 \text{ rad/s}^2$$

(4) 求齿轮 2 从角速度 $(\omega_2)_0 = 0$ 上升到 $(\omega_2)_t = 100 \text{ rad/s}$ 时所需的时间 t

$$(\omega_2)_t = (\omega_2)_0 + \varepsilon t$$

$$t = \frac{(\omega_2)_t - (\omega_2)_0}{\varepsilon} = \frac{100 - 0}{333.333} \text{ s} = 0.3 \text{ s}$$

习题 10-6 图 10-7 所示轮系中, 已知各轮的齿数为 $z_1 = 25$ 、 $z_2 = 37$ 、 $z_3 = 100$, 模数 $m = 10 \text{ mm}$, 齿轮 1、2 为标准齿轮, 行星轮数目 $k = 2$, 对称安装, 行星轮质量 $G_{22'} = 10 \text{ kg}$, 各转动构件绕各自轴线的转动惯量分别为 $J_1 = 0.005 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, $J_2 = 0.01 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, $J_H = 0.02 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 。当系杆 H 转速为 $\omega_H = 100 \text{ rad/s}$ 时停止驱动, 同时用制动器 T 制动, 要求系杆 H 在转一周内停下来。试问应加的制动力矩 M_T 应为多大?

【解题思路及技巧】

首先计算行星轮系的传动比, 然后计算等效转动惯量, 最后根据力矩形式的运动方程或功能定理求解。

【解题过程】

选择齿轮 1 为等效构件。

(1) 求各构件的运动

$$\frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_3 - \omega_H} = -\frac{z_3}{z_1}$$

由于

$$\omega_3 = 0$$

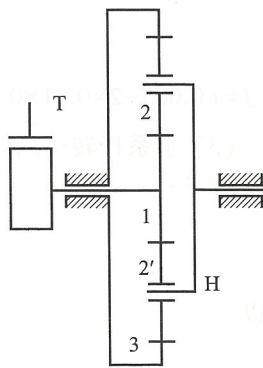


图 10-7

于是

$$\omega_H = \frac{\omega_1}{1 + \frac{z_3}{z_1}} = \frac{z_1 \omega_1}{z_1 + z_3}$$

$$\frac{\omega_H}{\omega_1} = 0.2$$

$$\frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_2 - \omega_H} = -\frac{z_2}{z_1}$$

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{z_2 - 4z_1}{5z_2} = -0.34$$

行星轮 2、2' 的质心 (在其回转轴线上) 的运动速度为

$$v_2 = (r_1 + r_2) \omega_H$$

式中: r_1 为齿轮 1 的分度圆半径; r_2 为齿轮 2 的分度圆半径。

$$r_1 = \frac{mz_1}{2} = \frac{10 \times 25}{2} \text{ mm} = 125 \text{ mm}$$

$$r_2 = \frac{mz_2}{2} = \frac{10 \times 37}{2} \text{ mm} = 185 \text{ mm}$$

$$\frac{v_2}{\omega_1} = \frac{r_1 + r_2}{1000} \frac{\omega_H}{\omega_1} = 0.062 \text{ mm}$$

(2) 求等效转动惯量

$$J = J_1 + 2J_2 \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} + 2G_{22'} \frac{v_2^2}{\omega_1^2} + J_H \frac{\omega_H^2}{\omega_1^2}$$

$$J = (0.005 + 2 \times 0.01 \times 0.34^2 + 2 \times 10 \times 0.062^2 + 0.02 \times 0.2^2) \text{ kg} \cdot \text{m}^2 = 0.085 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

(3) 求系杆转一周时齿轮 1 转过的角度

由于

$$\omega_H = \frac{z_1 \omega_1}{z_1 + z_3}$$

所以

$$\varphi_H = \frac{z_1 \varphi_1}{z_1 + z_3}$$

式中: φ_H 为系杆转过的角度; φ_1 为齿轮 1 转过的角度。

当 $\varphi_H = 2\pi$ 时,

$$\varphi_1 = \frac{z_1 + z_3}{z_1} \varphi_H = \frac{25 + 100}{25} \times 2\pi = 10\pi$$

(4) 求制动力矩

当 $\omega_H = 100 \text{ rad/s}$ 时, $\omega_1 = 500 \text{ rad/s}$

$$M_T \varphi_1 = \frac{1}{2} J \omega_1^2$$

制动力矩为

$$M_T = 338.2 \text{ N} \cdot \text{m}$$

习题 10-7 图 10-8 所示导杆机构中, 已知 $l_{AB} = 100 \text{ mm}$, $\varphi_1 = 90^\circ$, $\varphi_3 = 30^\circ$; 导杆 3 对轴 C 的转动惯量 $J_C = 0.016 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, 其他构件的质量和转动惯量均忽略不计; 作用在导杆 3 上的阻力矩 $M_3 = 10 \text{ N} \cdot \text{m}$ 。若取曲柄 1 为等效构件, 试求该机构的等效阻力矩 M_e 和等效转动惯量 J_e 。

【解题思路及技巧】

首先通过运动分析计算出导杆 3 的角速度, 然后根据等效原则计算等效转动惯量和等效力矩。

【解题过程】

(1) 求导杆 3 的运动

过图 10-8 中点 B 作导杆 3 的垂线与点 A 和点 C 的连线相交于点 P_{13} , 该点是构件 1 与构件 3 的速度瞬心, 于是有

$$\frac{\omega_3}{\omega_1} = \frac{\overline{AP_{13}}}{\overline{CP_{13}}}$$

$$\overline{AP_{13}} = l_{AB} \tan \angle ABP_{13}$$

由图 10-8 可知

$$\angle ABP_{13} = \varphi_3$$

于是

$$\overline{AP_{13}} = l_{AB} \tan \varphi_3$$

$$\overline{CP_{13}} = \overline{AP_{13}} + \overline{AC} = l_{AB} \tan \varphi_3 + \frac{l_{AB}}{\tan \varphi_3}$$

因此

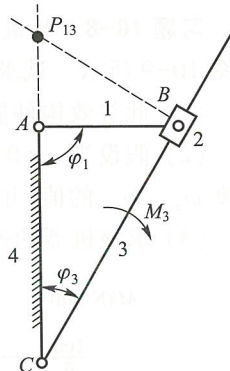


图 10-8

$$\frac{\omega_3}{\omega_1} = \frac{l_{AB} \tan \varphi_3}{l_{AB} \tan \varphi_3 + \frac{l_{AB}}{\tan \varphi_3}} = \frac{\tan^2 \varphi_3}{1 + \tan^2 \varphi_3}$$

(2) 求等效阻力矩

$$M_r = M_3 \frac{\omega_3}{\omega_1} = M_3 \frac{\tan^2 \varphi_3}{1 + \tan^2 \varphi_3} = 10 \text{ N} \cdot \text{m} \times \frac{\tan^2 30^\circ}{1 + \tan^2 30^\circ} = 2.5 \text{ N} \cdot \text{m}$$

(3) 求等效转动惯量

$$J_e = J_c \left(\frac{\omega_3}{\omega_1} \right)^2 = J_c \left(\frac{\tan^2 \varphi_3}{1 + \tan^2 \varphi_3} \right)^2 = 0.016 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \times \left(\frac{\tan^2 30^\circ}{1 + \tan^2 30^\circ} \right)^2 = 0.001 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

习题 10-8 某机器的等效驱动力矩 M_d 、等效阻力矩 M_r 和等效转动惯量 J_e 如图 10-9 所示。试求：

- (1) 此等效构件能否作周期性速度波动？为什么？
- (2) 假设当 $\varphi = 0$ 时，等效构件的角速度为 100 rad/s ，试求该等效构件的角速度 $\omega_{\max}$ 、 $\omega_{\min}$ 的值，并指出其出现的位置。
- (3) 求该机器的速度不均匀系数 δ 。

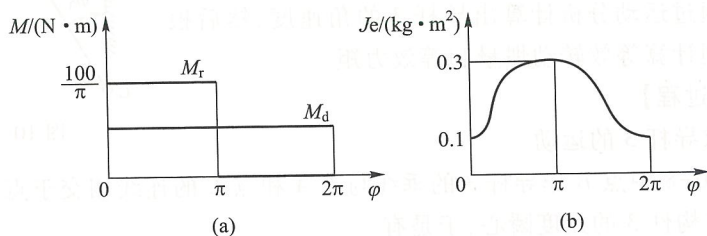


图 10-9

【解题思路及技巧】

(1) 因为 M_d 、 M_r 均为周期性变化，其公共周期为 2π ，而 J_e 也是周期性变化，变化周期也为 2π ，所以该等效构件的速度波动是周期性的，变化的周期为 2π 。

(2) 因在 $\varphi = 0 \sim \pi$ 内， $M_r > M_d$ ，将出现亏功；而在 $\varphi = \pi \sim 2\pi$ 内， $M_d > M_r = 0$ ，将出现盈功，所以该机器能量的最高点（即速度的最高点）将出现在 $\varphi = 0$ 或 2π 时，而能量的最低点（即速度的最低点）将出现在 $\varphi = \pi$ 时。

【解题过程】

(1) 此等效构件作周期性速度波动。因为此等效构件等效转动惯量和等效阻力矩为周期性变化，引起了等效构件速度的周期性波动。

(2) 求该等效构件的角速度 $\omega_{\max}$ 、 $\omega_{\min}$

由于等效构件作周期性速度波动, 在一个稳定运动周期内, 等效驱动力矩所做的功等于等效阻力矩所作的功, 于是

$$\int_0^{2\pi} M_d d\varphi = \int_0^{2\pi} M_r d\varphi$$

由图 10-9a 可以看出

$$\int_0^{2\pi} M_d d\varphi = \int_0^{\pi} \frac{100}{\pi} d\varphi$$

$$2\pi M_d = \pi \times \frac{100}{\pi}$$

$$M_d = \frac{50}{\pi}$$

设 $\varphi=0$ 时, 等效构件的角速度为 $\omega_0 = 100 \text{ rad/s}$, 等效构件的等效转动惯量为 $J_0 = 0.1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ (见图 10-9b)。当 $\varphi=\pi$ 时等效构件的动能为

$$\frac{1}{2} J_{\pi} \omega_{\pi}^2 = \frac{1}{2} J_0 \omega_0^2 + \int_0^{\pi} (M_d - M_r) d\varphi$$

$$\frac{1}{2} J_{\pi} \omega_{\pi}^2 = \frac{1}{2} J_0 \omega_0^2 + \int_0^{\pi} \left(\frac{50}{\pi} - \frac{100}{\pi} \right) d\varphi = \frac{1}{2} \times 0.1 \times 100^2 - 50 = 450$$

$\varphi=\pi$ 时等效构件的角速度为

$$\omega_{\pi} = \sqrt{\frac{2 \times 450}{J_{\pi}}} = \sqrt{\frac{2 \times 450}{0.3}} \text{ rad/s} = 54.77 \text{ rad/s}$$

很显然, $\varphi=2\pi$ 时等效构件的角速度为

$$\omega_{2\pi} = \omega_0 = 100 \text{ rad/s}$$

由此可知, 等效构件的最大角速度为

$$\omega_{\max} = \omega_0 = 100 \text{ rad/s}$$

且出现在 $\varphi=0$ (或 $\varphi=2\pi$) 时;

最小角速度为

$$\omega_{\min} = \omega_{\pi} = 54.77 \text{ rad/s}$$

且出现在 $\varphi=\pi$ 时。

(3) 求该机器的速度不均匀系数 δ

$$\delta = \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\omega_m}$$

通常平均角速度按照以下方法近似计算:

$$\omega_m \approx \frac{\omega_{\max} + \omega_{\min}}{2} = \frac{100 + 54.77}{2} \text{ rad/s} = 77.385 \text{ rad/s}$$

机器的速度不均匀系数为

$$\delta = \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\omega_m} = \frac{100 - 54.77}{77.385} = 0.58$$

习题 10-9 图 10-10 所示的轮系中, 已知各齿轮齿数 $z_1 = z_{2'} = 20$, $z_2 = z_3 = 40$, 作用在轴 O_3 上的阻力矩 $M_3 = 40 \text{ N} \cdot \text{m}$, $J_1 = J_{2'} = 0.01 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, $J_2 = J_3 = 0.04 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, 当取齿轮 1 为等效构件时, 求机构的等效转动惯量和阻力矩 M_3 的等效力矩。

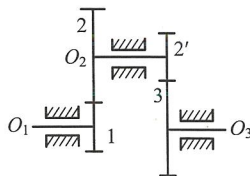


图 10-10

【解题思路及技巧】

(1) 进行质量或转动惯量等效计算时, 总动能保持不变。

(2) 进行力或力矩等效计算时, 瞬时功率保持不变。

【解题过程】

设齿轮 1、2(2')、3 的角速度分别为 ω_1 、 ω_2 、 ω_3 , 该轮系等效到齿轮 1 的等效转动惯量为 J_e 。根据系统总动能不变, 得

$$\frac{1}{2} J_e \omega_1^2 = \frac{1}{2} J_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} (J_2 + J_{2'}) \omega_2^2 + \frac{1}{2} J_3 \omega_3^2$$

于是

$$\begin{aligned} J_e &= J_1 + (J_2 + J_{2'}) \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 + J_3 \left(\frac{\omega_3}{\omega_1} \right)^2 = J_1 + (J_2 + J_{2'}) \left(\frac{z_1}{z_2} \right)^2 + J_3 \left(\frac{z_1 \cdot z_{2'}}{z_2 \cdot z_3} \right)^2 \\ &= \left[0.01 + (0.04 + 0.01) \times \frac{1}{4} + 0.04 \times \frac{1}{16} \right] \text{ kg} \cdot \text{m}^2 = 0.025 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \end{aligned}$$

设阻力矩 M_3 等效到齿轮 1 轴上的等效力矩为 M_e 。根据瞬时功率不变, 得

$$M_e \omega_1 = M_3 \omega_3$$

于是

$$M_e = M_3 \frac{\omega_3}{\omega_1} = M_3 \frac{z_1 z_{2'}}{z_2 z_3} = 40 \times \frac{1}{4} \text{ N} \cdot \text{m} = 10 \text{ N} \cdot \text{m}$$

M_e 的方向应与齿轮 1 的转动方向相反。

习题 10-10 如图 10-11 所示的轮系中, 已知加于齿轮 1 和齿轮 3 上的力矩 $M_1 = 80 \text{ N} \cdot \text{m}$ 和 $M_3 = 100 \text{ N} \cdot \text{m}$; 各轮的转动惯量 $J_1 = 0.1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, $J_2 = 0.225 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, $J_3 = 0.4 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$; 各齿轮的齿数 $z_1 = 20$, $z_2 = 30$, $z_3 = 40$; 在开始的瞬时齿轮 1 的角速

度等于零。求在运动开始后经过 0.5 s 时齿轮 1 的角加速度 ε_1 和角速度 ω_1 。

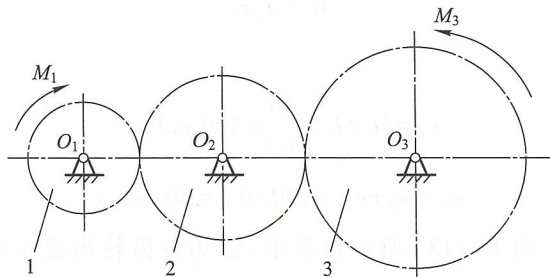


图 10-11

【解题思路及技巧】

(1) 因为要求在运动开始后经过 0.5 s 时齿轮 1 的角加速度 ε_1 和角速度 ω_1 , 所以选齿轮 1 为等效构件。

(2) 进行转动惯量等效计算时, 总动能保持不变。

(3) 进行力矩等效计算时, 瞬时功率保持不变。

【解题过程】

设齿轮 1、2、3 的角速度分别为 ω_1 、 ω_2 、 ω_3 。取齿轮 1 为等效构件, 设该轮系等效到齿轮 1 的等效转动惯量为 J_e 。根据系统总动能不变, 得

$$\frac{1}{2} J_e \omega_1^2 = \frac{1}{2} J_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2 + \frac{1}{2} J_3 \omega_3^2$$

于是

$$\begin{aligned} J_e &= J_1 + J_2 \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 + J_3 \left(\frac{\omega_3}{\omega_1} \right)^2 = J_1 + J_2 \left(\frac{z_1}{z_2} \right)^2 + J_3 \left(\frac{z_1}{z_3} \right)^2 \\ &= \left[0.1 + 0.225 \times \left(\frac{20}{30} \right)^2 + 0.4 \times \left(\frac{20}{40} \right)^2 \right] \text{ kg} \cdot \text{m}^2 = 0.3 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \end{aligned}$$

设该轮系等效到齿轮 1 上的等效力矩为 M_e 。根据瞬时功率不变, 得

$$M_e \omega_1 = M_1 \omega_1 - M_3 \omega_3$$

于是

$$M_e = M_1 - M_3 \frac{\omega_3}{\omega_1} = M_1 - M_3 \frac{z_1}{z_3} = \left(80 - 100 \times \frac{20}{40} \right) \text{ N} \cdot \text{m} = 30 \text{ N} \cdot \text{m}$$

对于力矩形式的机械运动方程式 $J_e \frac{d\omega_1}{dt} + \frac{\omega_1^2}{2} \frac{dJ_e}{d\varphi} = M_e$, 当等效转动惯量 J_e 和

等效力矩 M_e 为常数时, 则

$$M_e = J_e \varepsilon_1$$

从而

$$\varepsilon_1 = M_e / J_e = \frac{30}{0.3} = 100 \text{ rad/s}^2$$

$$\omega_1 = \omega_0 + \varepsilon_1 t = 100 \times 0.5 = 50 \text{ rad/s}$$

习题 10-11 图 10-12a 所示轮系中, 已知各齿轮齿数 $z_1 = 20, z_2 = 40, z_3 = 25, z_4 = 35$, 作用在齿轮 4 上的阻力矩为 M_4 。求:

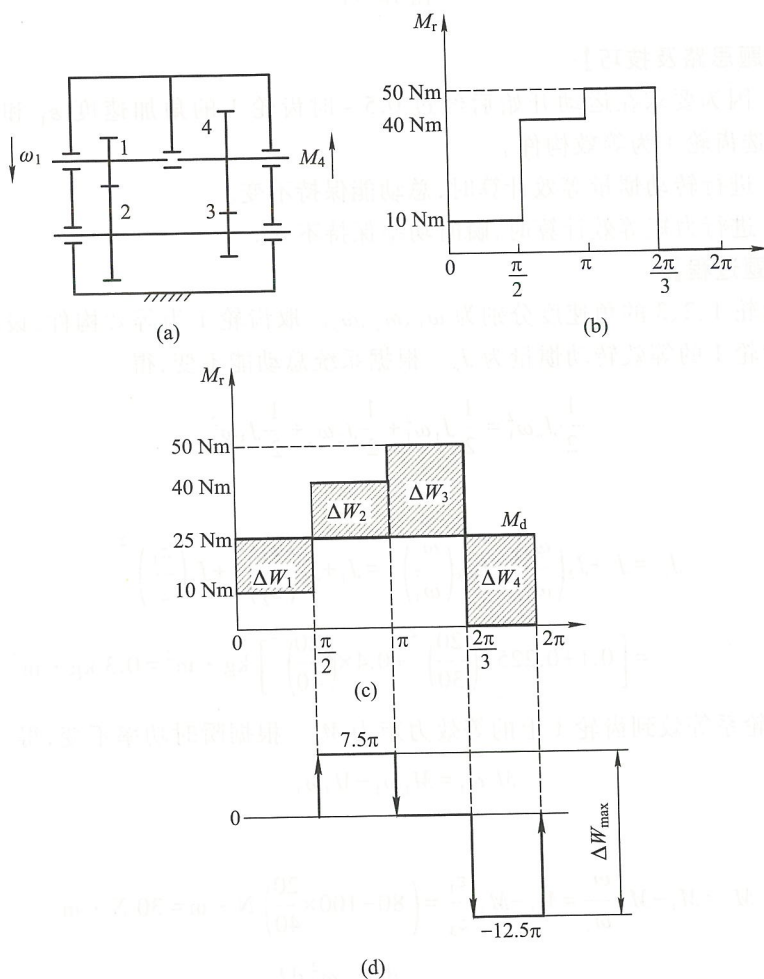


图 10-12

(1) 以齿轮 1 为等效构件时, 等效阻力矩 M_r ;

(2) 若此系统的稳定运动周期为 2π , 等效阻力矩如图 10-12b 所示, 等效驱动力矩 M_d 为常数, $\omega_{\min} = 96 \text{ rad/s}$, $\omega_{\max} = 110 \text{ rad/s}$ 。求速度不均匀系数 δ 和最大盈亏功 $\Delta W_{\max}$ 。

【解题过程】

(1) 以 1 为等效构件, 根据瞬时功率不变, 得

$$M_r \omega_1 = M_4 \omega_4$$

则

$$M_r = \frac{\omega_4}{\omega_1} M_4 = \frac{z_3 z_1}{z_4 z_2} M_4 = \frac{25 \times 20}{35 \times 40} M_4 = \frac{5}{14} M_4$$

(2) 速度不均匀系数为

$$\delta = \frac{2(\omega_{\max} - \omega_{\min})}{(\omega_{\max} + \omega_{\min})} = \frac{2 \times (110 - 96)}{110 + 96} = \frac{14}{103}$$

根据在一个稳定周期内驱动力矩所作的功等于阻力矩所作的功, 得

$$M_d \times 2\pi = (10 + 40 + 50) \times \frac{\pi}{2} \text{ N} \cdot \text{m}$$

则驱动力矩为

$$M_d = 25 \text{ N} \cdot \text{m}$$

画驱动力矩曲线如图 10-12c 所示, 各阶段盈亏功为

$$\Delta W_1 = (25 - 10) \times \frac{\pi}{2} \text{ N} \cdot \text{m} = 7.5\pi \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$\Delta W_2 = (25 - 40) \times \frac{\pi}{2} \text{ N} \cdot \text{m} = -7.5\pi \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$\Delta W_3 = (25 - 50) \times \frac{\pi}{2} \text{ N} \cdot \text{m} = -12.5\pi \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$\Delta W_4 = (25 - 0) \times \frac{\pi}{2} \text{ N} \cdot \text{m} = 12.5\pi \text{ N} \cdot \text{m}$$

根据各阶段盈亏功, 画系统的能量指示图如图 10-12d 所示。因此, 最大盈亏功为

$$\Delta W_{\max} = (7.5\pi + 12.5\pi) \text{ N} \cdot \text{m} = 20\pi \text{ N} \cdot \text{m}$$

第十一章 机械的平衡

11.1 基本要求

1. 掌握刚性转子的静平衡和动平衡的计算方法;
2. 掌握刚性转子的平衡试验原理及方法;
3. 了解挠性转子平衡的特点、原理和方法;
4. 了解机构平衡的原理和方法。

11.2 重点及难点解析

11.2.1 本章重点

机械平衡的目的是通过增加和减少校正质量消除或减少不平衡惯性力和惯性力矩,从而消除或减少惯性力对机械的不良影响。机械的平衡问题分为转子的平衡和机构的平衡两类。本章重点是刚性转子平衡的原理及计算方法。

1. 刚性转子的静平衡和动平衡

(1) 静平衡

对于轴向尺寸较小(宽径比 $b/D < 0.2$)的盘类转子,其所有质量都可以认为在垂直于轴线的同一平面内。这种转子的不平衡是因为其质心位置不在回转轴线上,且不平衡现象在转子静止时就能够显示出来,故称为静不平衡。对于这种不平衡转子,只需设法重新分布其质量,使质心移到回转轴线上即可达到平衡,这种平衡称为静平衡。刚性转子的静平衡条件为所有惯性力的矢量之和等于零或所有质径积的矢量之和等于零,即

$$\sum \boldsymbol{F}_i = 0 \text{ 或 } \sum m_i \boldsymbol{r}_i = 0$$

凡满足这一条件的构件通常称为静平衡构件。

(2) 动平衡

对于轴向尺寸较大(宽径比 $b/D \geq 0.2$)的转子,其质量就不能再被认为分布在同一平面内。这种转子的不平衡现象有时只在转子运转时才完全显示出来,

故称为动不平衡。对于动不平衡的转子,通常选择两个垂直于轴线的平衡基面,并在这两个面上适当加上(或除去)两个平衡质量,使转子所产生的惯性力和惯性力偶矩都达到平衡,这种平衡称为动平衡。刚性转子动平衡的条件是惯性力之和和惯性力矩之和都等于零,即

$$\sum F_i = 0$$

$$\sum M_i = 0$$

凡同时满足这两个条件的转子称为动平衡转子。

2. 机构的平衡

对机构中作往复移动和平面运动的构件所产生的惯性力和惯性力矩,无法通过调整机构质量的大小或改变质量分布状态的方法得到平衡,只能对整个机构进行平衡。其方法是设法使机构的总质心落在机架上并固定不动,这种平衡称为机构在机座上的平衡,简称机构的平衡。常采用质量代换的方法,即把构件的质量简化成几个集中质量,使它们产生的惯性力(或它们的质量和质心位置)与原来构件相同,这种代换方法称为质量静代换。若几个代换质量所产生的惯性力和惯性力矩与原构件的惯性力和惯性力矩相同,则称为质量的动代换。

11.2.2 本章难点

本章难点是刚性转子动平衡的计算方法以及平面机构平衡的原理和计算方法。

11.3 典型例题分析及解题技巧

例 11-1 如图 11-1 所示的三根曲轴结构中,已知 $Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q_4 = Q$, $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = r$, $L_{12} = L_{23} = L_{34} = L$, 且曲拐在同一平面中。试判断哪根曲轴达到静平衡,哪根曲轴达到动平衡。

【解题思路及技巧】

运用刚性转子静平衡的平衡条件和动平衡的平衡条件进行判别。

【解题过程】

如图 11-1a 所示的曲轴为静平衡,而动不平衡。因为

$$\sum F_i = \frac{\omega^2}{g} (Q_1 r_1 + Q_2 r_2 - Q_3 r_3 - Q_4 r_4) = \frac{\omega^2}{g} (2Qr - 2Qr) = 0$$

若对平面 I-I 取矩,即

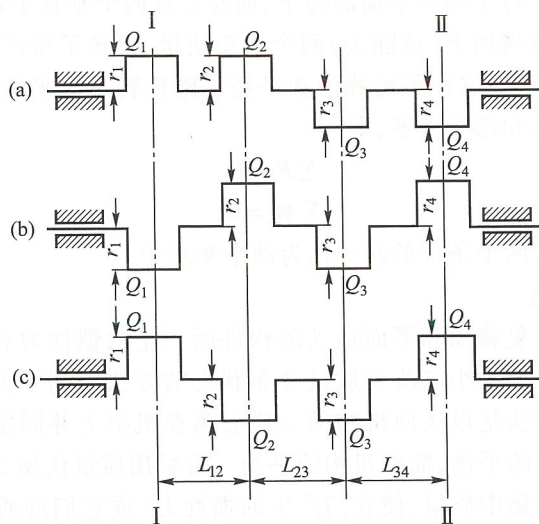


图 11-1

$$\begin{aligned}\sum M_I &= \frac{\omega^2}{g} [Q_2 r_2 L_{12} - Q_3 r_3 (L_{12} + L_{23}) - Q_4 r_4 (L_{12} + L_{23} + L_{34})] \\ &= \frac{\omega^2}{g} (QrL - 2QrL - 3QrL) = -4 \frac{\omega^2}{g} QrL \neq 0\end{aligned}$$

如图 11-1b 所示的曲轴为静平衡,而动不平衡。因为

$$\sum F_i = \frac{\omega^2}{g} (Q_1 r_1 - Q_2 r_2 + Q_3 r_3 - Q_4 r_4) = \frac{\omega^2}{g} (2Qr - 2Qr) = 0$$

若对平面 I-I 取矩,即

$$\begin{aligned}\sum M_I &= \frac{\omega^2}{g} [Q_2 r_2 L_{12} - Q_3 r_3 (L_{12} + L_{23}) + Q_4 r_4 (L_{12} + L_{23} + L_{34})] \\ &= \frac{\omega^2}{g} (QrL - 2QrL + 3QrL) = 2 \frac{\omega^2}{g} QrL \neq 0\end{aligned}$$

如图 11-1c 所示的曲轴达到静平衡,又达到动平衡,即完全平衡。因为

$$\sum F_i = \frac{\omega^2}{g} (Q_1 r_1 - Q_2 r_2 + Q_3 r_3 - Q_4 r_4) = \frac{\omega^2}{g} (2Qr - 2Qr) = 0$$

若对平面 I-I 取矩,即

$$\begin{aligned}\Sigma M_I &= \frac{\omega^2}{g} [Q_2 r_2 L_{12} + Q_3 r_3 (L_{12} + L_{23}) - Q_4 r_4 (L_{12} + L_{23} + L_{34})] \\ &= \frac{\omega^2}{g} (QrL + 2QrL - 3QrL) = 0\end{aligned}$$

例 11-2 如图 11-2a 所示鼓轮因有重块 A 和 B 的关系而失去平衡。已知重量 $Q_A = 45 \text{ N}$ 和 $Q_B = 22.5 \text{ N}$, 其位置如图所示。现在其左端面 T' 和中间平面 T'' 的圆周表面上各加一平衡重量, 使其达到完全动平衡, 求该平衡重量 Q' 和 Q'' 的大小和位置。

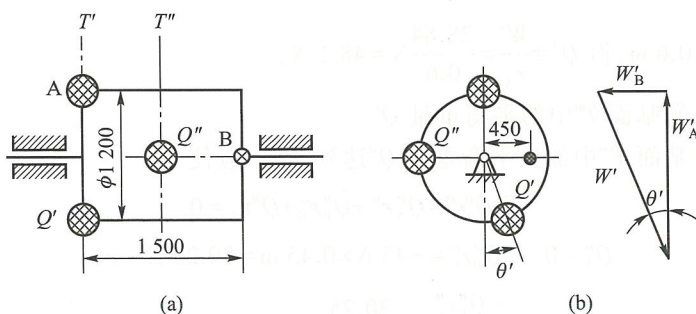


图 11-2

【解题思路及技巧】

运用刚性转子动平衡的平衡条件求解, 注意两个平衡基面位于不平衡质量的同一侧时, 在距不平衡质量较远的平衡基面上, 不平衡质量所产生的惯性力的分解力为负值, 即在距不平衡质量较远的平衡基面上惯性力的分解力与该惯性力的方向相反。

【解题过程】

(1) 将重块 A 和 B 的重量 Q_A 和 Q_B 分解到平衡基面 T' 和 T''

在平衡基面 T' 中各重量的分量为

$$Q'_A = Q_A = 45 \text{ N}, \quad Q'_B = Q_B = 22.5 \text{ N (在 } Q_B \text{ 的对侧)}$$

在平衡基面 T'' 中各重量的分量为

$$Q''_A = 0, \quad Q''_B = Q_B \frac{1.5}{0.75} = 45 \text{ N (在 } Q_B \text{ 的同侧)}$$

(2) 平衡基面 T' 中的平衡重量 Q'

在平衡基面 T' 中加平衡重量 Q' 达到平衡, 应使

$$\Sigma Q'_i r'_i = Q'_A r'_A + Q'_B r'_B + Q' r'_A = 0$$

$$W'_A = Q'_A r'_A = 45 \text{ N} \times 0.6 \text{ m} = 27 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$W'_B = Q'_B r'_B = 22.5 \text{ N} \times 0.45 \text{ m} = 10.125 \text{ N} \cdot \text{m}$$

作矢量多边形(图 11-2b),则封闭矢量 W' 即代表在平衡基面 T' 中应加的平衡重量 Q' 的重径积,故得 $Q' r_A$ 的方位角

$$\theta' = \arctan \frac{W'_B}{W'_A} = \arctan \frac{10.125}{27} = 20^\circ 33'$$

从而得:

$$Q' r_A = W' = \frac{W'_A}{\cos \theta'} = 28.84 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$\text{又 } r_A = 0.6 \text{ m, 得 } Q' = \frac{W'}{r_A} = \frac{28.84}{0.6} \text{ N} = 48.1 \text{ N}。$$

(3) 平衡基面 T'' 中的平衡重量 Q''

在平衡基面 T'' 中加平衡重量 Q'' 达到平衡,应使

$$\sum Q''_i r''_i = Q''_A r''_A + Q''_B r''_B + Q'' r_A = 0$$

$$Q''_A = 0; \quad Q''_B r''_B = -45 \text{ N} \times 0.45 \text{ m} = 20.25 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$\text{已知 } r_A = 0.6 \text{ m, 得 } Q'' = \frac{-Q''_B r''_B}{r_A} = -\frac{20.25}{0.6} \text{ N} = -33.75 \text{ N}。$$

式中“-”号表示 Q'' 位于重块 Q_B 的相反径向线上。

例 11-3 在图 11-3 所示的曲柄滑块机构的平衡装置中,点 C_1 、 C_2 和 C_3 分别为构件 1、2 和 3 的质心,已知构件的尺寸和重量如下: $L_{AB} = 100 \text{ mm}$, $L_{BC} = 400 \text{ mm}$, $L_{AC_1} = 30 \text{ mm}$, $L_{BC_2} = 100 \text{ mm}$, $L_{CC_3} = 0 \text{ mm}$, $r' = r'' = 50 \text{ mm}$; $Q_1 = 250 \text{ N}$, $Q_2 = 100 \text{ N}$ 及 $Q_3 = 300 \text{ N}$ 。齿轮 a 和 b 的大小相等。求为了平衡该机构所有回转质量的全部惯性力和移动质量的第一级惯性力,必须装在 a、b 两轮($r' = r''$)上的平衡重量 Q' 和 Q'' 的大小。

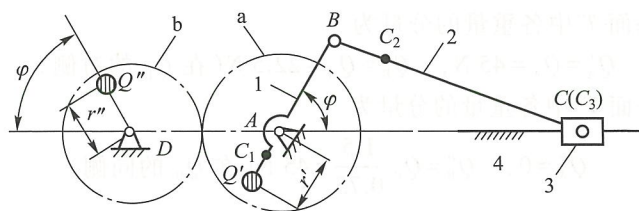


图 11-3

【解题思路及技巧】

采用质量静代换法对机构进行平衡,注意两代换点在质心同一侧时,距质心

较远的代换点处的代换质量为负值。

【解题过程】

(1) 将曲柄 1 的重量 Q_1 按静代换法分配到 A、B 两点, 并将连杆 2 的重量 Q_2 按静代换法分配到 B、C 两点, 点 B 的集中重量为

$$Q_B = -Q_1 \frac{L_{AC_1}}{L_{AB}} + Q_2 \frac{(L_{BC} - L_{BC_2})}{L_{BC}} = \left(-250 \times \frac{3}{10} + 100 \times \frac{40-10}{40} \right) \text{N} = 0$$

说明回转重量所产生的惯性力已经平衡。点 C 的集中重量为

$$Q_C = Q_2 \frac{L_{BC_2}}{L_{BC}} + Q_3 = \left(100 \times \frac{10}{40} + 300 \right) \text{N} = 325 \text{ N}$$

(2) 求平衡移动重量 Q_C 所产生惯性力的平衡重量

因

$$\frac{Q' + Q''}{g} \omega^2 r' \cos \varphi = \frac{Q_C}{g} \omega^2 L_{AB} \cos \varphi$$

所以

$$Q' + Q'' = Q_C \frac{L_{AB}}{r'} = 325 \times \frac{10}{5} \text{N} = 650 \text{ N}$$

要使垂直方向分力互相抵消, 应使 $Q' = Q'' = \frac{1}{2} \times 650 \text{ N} = 325 \text{ N}$

例 11-4 在图 11-4 图示的插齿机构中, 点 C_1 、 C_2 和 C_3 分别为构件 1、2 和 3 的质心, 已知 $L_{AB} = 70 \text{ mm}$, $L_{BC} = 290 \text{ mm}$, $L_{CD} = 280 \text{ mm}$, $L_{AC_1} = 5 \text{ mm}$, $L_{BC_2} = 145 \text{ mm}$, $L_{DC_3} = 10 \text{ mm}$, 扇形齿轮的分度圆半径 $r = 140 \text{ mm}$; 质量 $m_1 = 5 \text{ kg}$, $m_2 = 4 \text{ kg}$, $m_3 = 5 \text{ kg}$, $m_4 = 20 \text{ kg}$ 。当曲柄 1 与连杆 2 成直线时, 摇杆 3 的倾角 $\alpha = 16^\circ 15'$ 。设在曲柄延长线 $r' = 80 \text{ mm}$ 处装上一个平衡重量 Q' 及在摇杆 $r'' = 80 \text{ mm}$ 处装上一个平衡重量 Q'' 来进行该机构的平衡, 求 Q' 和 Q'' 的大小。

【解题思路及技巧】

运用质量静代换法对平面机构进行平衡。

【解题过程】

(1) 将连杆 2 的质量 m_2 按质量静代换法分配到 C、B 两点进行代换, 应该满足下列两式:

$$m_{2C}(L_{BC} - L_{BC_2}) = m_{2B}L_{BC_2} \quad (\text{a})$$

$$m_{2C} + m_{2B} = m_2 \quad (\text{b})$$

联立解式(a)和式(b)两式, 得

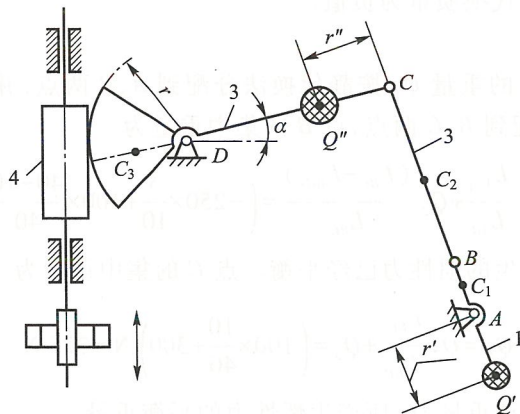


图 11-4

$$m_{2C} = \frac{m_2 L_{BC_2}}{L_{BC}} = \frac{4 \times 145}{290} \text{ kg} = 2 \text{ kg}$$

(2) 求加在曲柄 1 的 r' 处的平衡重量 Q'

因

$$m' r' = m_{2B} L_{AB} + m_1 L_{AC_1}$$

所以

$$m' = \frac{m_{2B} L_{AB} + m_1 L_{AC_1}}{r'} = \frac{2 \times 70 + 5 \times 5}{80} \text{ kg} = 2.06 \text{ kg}$$

于是

$$Q' = m' g = 2.06 \times 9.8 \text{ N} = 20.2 \text{ N}$$

因为当插齿机构运动时,插齿刀轴的重量 Q_A 对点 D 的力矩为常数,而摇杆 3 的重量 Q_3 和平衡重量 Q'' 对点 D 的力矩为变化的,所以不可能达到完全静平衡。这样,便按摇杆的上极端位置来计算平衡重量 Q'' :

$$m_4 r + m_3 L_{DC_3} \cos \alpha = m'' (L_{CD} - r'') \cos \alpha + m_{2C} L_{CD} \cos \alpha$$

所以

$$\begin{aligned} m'' &= \frac{m_4 r + m_3 L_{DC_3} \cos \alpha - m_{2C} L_{CD} \cos \alpha}{(L_{CD} - r'') \cos \alpha} \\ &= \frac{20 \times 140 + 5 \times 10 \times 0.96 - 2 \times 280 \times 0.96}{(280 - 80) \times 0.96} \text{ kg} = 12 \text{ kg} \end{aligned}$$

于是

$$Q'' = m''g = 12 \times 9.8 \text{ N} = 118 \text{ N}$$

11.4 习题解答

习题 11-1 解释以下基本概念:

静平衡, 动平衡, 平衡基面, 质径积, 平衡精度, 挠性转子平衡, 平面机构平衡。

【解题思路及技巧】

明确基本概念。

【解题过程】

(1) 静平衡

对于轴向尺寸较小(宽径比 $b/D < 0.2$) 的盘状转子, 它们的质量可以视为分布在同一平面内。在此情况下, 若其质心不在回转轴线上, 则当其转动时, 其偏心质量就会产生惯性力, 从而在转动副中引起附加动压力。所谓刚性转子的静平衡, 就是利用在刚性转子上加减平衡质量的方法, 使其质心落到回转轴线上, 从而使转子的惯性力得以平衡(即惯性力之和为零)的一种平衡措施。

(2) 动平衡

对于轴向尺寸较大(宽径比 $b/D \geq 0.2$) 的转子, 其质量不能再视为分布在同一平面内。这时, 其偏心质量很可能分布在几个不同的回转平面内。在这种情况下, 即使转子的质心在回转轴线上, 但由于各偏心质量所产生的离心惯性力不在同一回转平面内, 因而将形成惯性力矩, 造成不平衡。这种不平衡, 只有在转子运动的情况下才显示出来。所谓刚性转子的动平衡, 不仅要平衡各偏心质量产生的离心惯性力, 而且还要平衡离心惯性力所形成的惯性力矩。

(3) 平衡基面

根据转子的结构, 人为选定的安装平衡质量的平面称为平衡基面。

(4) 质径积

质径积是在同一转速下表达转子上各不平衡质量的离心惯性力相对大小和方向的量。

(5) 平衡精度

平衡精度是衡量转子平衡程度的量, 用 $A = \frac{[e]\omega}{1000} \text{ mm/s}$ 表示。式中: ω 为转子的工作转速(单位是 rad/s); $[e]$ (单位是 μm) 为不平衡质量的许用偏心距, $[e] = \frac{[mr]}{m}$ 。

(6) 挠性转子平衡

在很多高速机械与大型回转机械中,转子的工作转速往往超过其本身的临界速度,这些转子在回转过程中将产生明显的变形——动挠度,因而引起或加剧其支承的振动。由于动挠度的出现,使转子的不平衡状态复杂化,即除由于质量分布不均造成的不平衡外,增加了转子弹性变形造成的不平衡,而后者又随工作转速按复杂规律变化。

与刚性转子平衡一样,挠性转子平衡也是要消除或减少由于转子不平衡对支承产生的动压力。但与刚性转子相比,挠性转子的动平衡具有以下两个特点:

1) 转子的不平衡质量对支承引起的动压力和转子弹性变形的形状随转子的工作转速而变化,因此在某一转速下平衡好的转子,不能保证在其他转速下也是平衡的。

2) 减小或消除支承动压力,不一定能减小转子的弯曲变形。而明显的弯曲变形将对转子的结构、强度和工作性能产生有害影响。

为此挠性转子的平衡要解决以下两个问题:

1) 根据转子运转过程中测得的动挠度或对支承的动压力,找出不平衡量的分布规律;

2) 根据不平衡量的分布规律,确定所需平衡质量的大小、相位和沿轴向的安放位置,以消除或减少支承动压力和转子的动挠度,并保证其在一定转速范围内平稳运转。

要同时解决这两个问题,不能再采用刚性转子双面平衡法,而应根据转子弹性变形的规律,采用多平衡面,并在几种转速下进行平衡。因此,挠性转子的平衡也称为多面平衡或振型平衡。

(7) 平面机构平衡

平面机构的各个运动构件总是有质量的,因此在机构的运动中就会产生惯性力。设法使各个运动构件的惯性力之和(又称为总惯性力)为零,则称其为平面机构平衡。

习题 11-2 经过动平衡的构件是否一定是静平衡的? 经过静平衡的构件是否一定要再行动平衡? 为什么? 讲清动平衡和静平衡的具体条件。

【解题思路及技巧】

明确静平衡和动平衡的基本概念。

【解题过程】

(1) 经过动平衡的构件一定是静平衡的。

所谓静平衡就是使不平衡质量的惯性力之和为零。而动平衡则是使不平衡质量的惯性力之和及惯性力矩之和都为零。由此可见,经过动平衡的构件,其不

平衡质量的惯性力之和为零,这也就是说,其已经达到静平衡。

(2) 经过静平衡的构件是否一定要再行动平衡?

经过静平衡的构件,一般都是轴向尺寸与其径向尺寸相比较小的构件,通常把这样的构件上的不平衡质量近似看作分布在同一个平面上。当这样的构件在低速下使用时,一般不再进行动平衡。如果该构件是在高速下使用,则会因为不平衡质量并不是严格分布在同一平面上而产生不平衡的惯性力矩。因此,经过静平衡的构件在高速下使用时往往应该再行动平衡。

习题 11-3 在图 11-5 所示的盘形转子中,有 4 个偏心质量位于同一回转平面内,其大小及回转半径分别为 $m_1 = 5 \text{ kg}$, $m_2 = 7 \text{ kg}$, $m_3 = 8 \text{ kg}$, $m_4 = 6 \text{ kg}$, $r_1 = r_4 = 100 \text{ mm}$, $r_2 = 200 \text{ mm}$, $r_3 = 150 \text{ mm}$, 方位如图所示。又设平衡质量 m 的回转半径 $r = 250 \text{ mm}$, 试求平衡质量 m 的大小及方位。

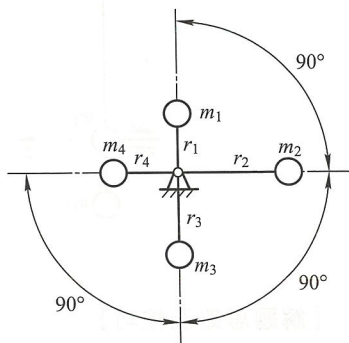


图 11-5

【解题思路及技巧】

运用刚性转子静平衡条件方程求解。

【解题过程】

静平衡条件方程:

$$m_1 r_1 + m_2 r_2 + m_3 r_3 + m_4 r_4 + m r = 0$$

设平衡质量的向径与 x 轴的夹角为 θ , 则

x 方向:

$$m_2 r_2 - m_4 r_4 + m r \cos \theta = 0$$

y 方向:

$$m_1 r_1 - m_3 r_3 + m r \sin \theta = 0$$

$$m r \cos \theta = m_4 r_4 - m_2 r_2 = 6 \text{ kg} \times 100 \text{ mm} - 7 \text{ kg} \times 200 \text{ mm} = -800 \text{ kg} \cdot \text{mm}$$

$$m r \sin \theta = m_3 r_3 - m_1 r_1 = 8 \text{ kg} \times 150 \text{ mm} - 5 \text{ kg} \times 100 \text{ mm} = 700 \text{ kg} \cdot \text{mm}$$

平衡质量为

$$m = \frac{\sqrt{(-800)^2 + 700^2}}{r} = \frac{\sqrt{1\,130\,000}}{250} \text{ kg} = 4.25 \text{ kg}$$

$$\cos \theta = \frac{-800}{m r} = \frac{-800}{4.25 \times 250} = -0.75$$

平衡质量的方位为

$$\theta = 138.8^\circ$$

习题 11-4 图 11-6 所示的三叶螺旋桨中,有 3 个偏心质量位于同一回转平面内,其大小及回转半径分别为 $m_1 = m_2 = m_3 = 1 \text{ kg}$; $r_1 = 3 \text{ mm}$, $r_2 = 6 \text{ mm}$, $r_3 = 2 \text{ mm}$,各偏心质量间的方位角为 $\theta_1 = 0^\circ$, $\theta_2 = 120^\circ$, $\theta_3 = 240^\circ$ 。利用解析法和图解法试求平衡质量 m_c 的大小及方位。

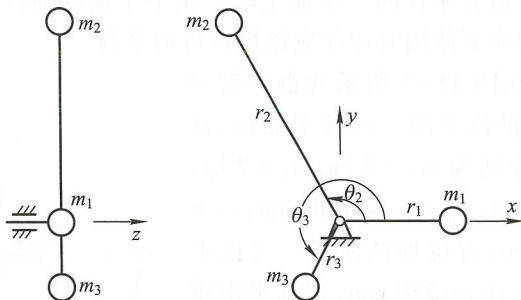


图 11-6

【解题思路及技巧】

运用刚性转子静平衡条件方程求解。

【解题过程】

如图 11-7a 所示,设平衡质量 m_c 的方位角为 θ_c 。

(1) 图解法

1) 计算质径积的大小

$$m_1 r_1 = 1 \times 3 \text{ kg} \cdot \text{mm} = 3 \text{ kg} \cdot \text{mm}$$

$$m_2 r_2 = 1 \times 6 \text{ kg} \cdot \text{mm} = 6 \text{ kg} \cdot \text{mm}$$

$$m_3 r_3 = 1 \times 2 \text{ kg} \cdot \text{mm} = 2 \text{ kg} \cdot \text{mm}$$

2) 按比例画质径积封闭多边形

如图 11-7b 所示,选定比例尺 $\mu \left(\frac{\text{实际质径积大小}/(\text{kg} \cdot \text{m})}{\text{图上的尺寸}/\text{mm}} \right)$,从任意点 a

开始,按向径 r_1 、 r_2 、 r_3 的方向连续作 $\overline{ab}$ 、 $\overline{bc}$ 、 $\overline{cd}$ 分别代表质径积 $m_1 r_1$ 、 $m_2 r_2$ 、 $m_3 r_3$ 的大小和方向,经测量求得

$$m_c r_c = \mu \overline{da} = 3.6 \text{ kg} \cdot \text{mm}$$

当根据回转体的结构选定半径 r_c 值大小后,即可求出平衡质量 m_c 的大小。由图测量平衡质量 m_c 的方位角为 $\theta_c = 286.1^\circ$ 。

(2) 解析法

静平衡条件方程为:

$$m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 + m_3 \mathbf{r}_3 + m_4 \mathbf{r}_4 + m_c \mathbf{r}_c = 0$$

将质径积向坐标轴上分解, 则

x 方向:

$$m_1 r_1 \cos \theta_1 + m_2 r_2 \cos \theta_2 + m_3 r_3 \cos \theta_3 + m_c r_c \cos \theta_c = 0$$

y 方向:

$$m_1 r_1 \sin \theta_1 + m_2 r_2 \sin \theta_2 + m_3 r_3 \sin \theta_3 + m_c r_c \sin \theta_c = 0$$

将已知条件代入上述两式并整理得

$$\begin{aligned} m_c r_c &= [(m_1 r_1 \cos \theta_1 + m_2 r_2 \cos \theta_2 + m_3 r_3 \cos \theta_3)^2 + (m_1 r_1 \sin \theta_1 + m_2 r_2 \sin \theta_2 + m_3 r_3 \sin \theta_3)^2]^{1/2} \\ &= 3.6 \text{ kg} \cdot \text{mm} \end{aligned}$$

$$\theta_c = \arctan \left(\frac{-m_1 r_1 \sin \theta_1 - m_2 r_2 \sin \theta_2 - m_3 r_3 \sin \theta_3}{-m_1 r_1 \cos \theta_1 - m_2 r_2 \cos \theta_2 - m_3 r_3 \cos \theta_3} \right) = \arctan \left(\frac{3.464}{-1} \right) = 286.1^\circ$$

因此, 可将 1 kg 的平衡质量放置在平衡向径 r_c 为 3.6 mm 的位置处, 且平衡质量的方位角为 286.1° 。

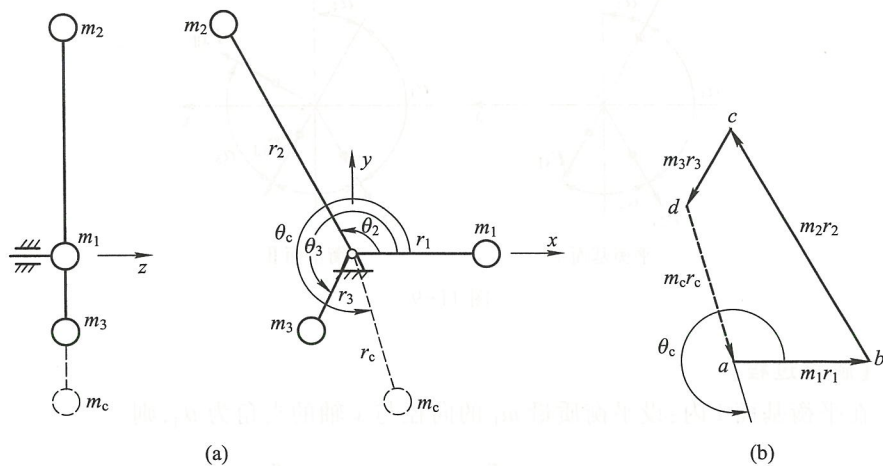


图 11-7

习题 11-5 在图 11-8 所示的转子中, 已知各偏心质量 $m_1 = 10 \text{ kg}$, $m_2 = 15 \text{ kg}$, $m_3 = 20 \text{ kg}$, $m_4 = 10 \text{ kg}$; 它们的回转半径分别为 $r_1 = 300 \text{ mm}$, $r_2 = r_4 = 150 \text{ mm}$,

$r_3 = 100 \text{ mm}$; 又知各偏心质量所在的回转平面间的距离为 $l_1 = l_2 = l_3 = 200 \text{ mm}$, 各偏心质量间的方位角为 $\alpha_1 = 120^\circ, \alpha_2 = 60^\circ, \alpha_3 = 90^\circ, \alpha_4 = 30^\circ$ 。若置于平衡基面 I 及 II 中的平衡质量 m_I 和 m_{II} 的回转半径均为 400 mm , 试求 m_I 及 m_{II} 的大小和方位。

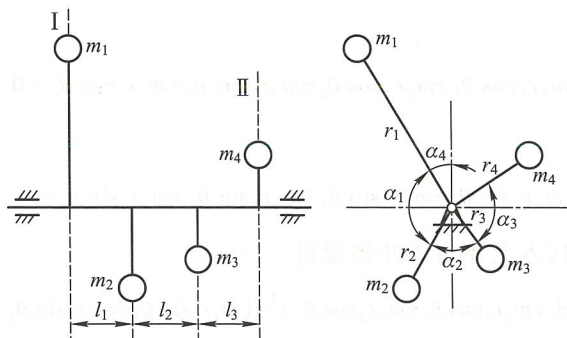


图 11-8

【解题思路及技巧】

首先将各个偏心质量所产生的惯性力向两个平衡基面上分解(图 11-9), 然后在两个平衡基面上分别运用静平衡方程式求解。

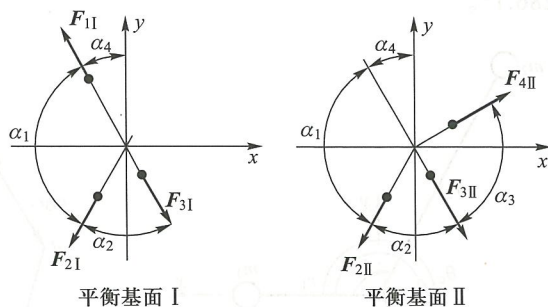


图 11-9

【解题过程】

在平衡基面 I 内: 设平衡质量 m_I 的向径与 x 轴的夹角为 θ_I , 则

$$F_{1I} = m_I r_I = 10 \times 300 \frac{r_1}{r_I} \text{ kg} \cdot \text{mm} = 3000 \frac{r_1}{r_I} \text{ kg} \cdot \text{mm}$$

$$F_{2I} = m_2 r_2 \frac{l_2 + l_3}{l_1 + l_2 + l_3} = 15 \times 150 \times \frac{400 r_2}{600 r_2} \text{ kg} \cdot \text{mm} = 1500 \frac{r_2}{r_2} \text{ kg} \cdot \text{mm}$$

$$F_{3I} = m_3 r_3 \frac{l_3}{l_1 + l_2 + l_3} = 20 \times 100 \times \frac{200 r_3}{600 r_3} \text{kg} \cdot \text{mm} = 666.67 \frac{r_3}{r_3} \text{kg} \cdot \text{mm}$$

x 方向:

$$-F_{1I} \sin \alpha_4 - F_{2I} \cos(\alpha_4 + \alpha_1 - 90^\circ) + F_{3I} \sin(\alpha_4 + \alpha_1 + \alpha_2 - 180^\circ) + m_I r_I \cos \theta_I = 0$$

$$m_I r_I \cos \theta_I = F_{1I} \sin \alpha_4 + F_{2I} \cos(\alpha_4 + \alpha_1 - 90^\circ) - F_{3I} \sin(\alpha_4 + \alpha_1 + \alpha_2 - 180^\circ)$$

$$= 3\,000 \text{ kg} \cdot \text{mm} \times \sin 30^\circ + 1\,500 \text{ kg} \cdot \text{mm} \times \cos 60^\circ -$$

$$666.67 \text{ kg} \cdot \text{mm} \times \sin 30^\circ = 1\,916.67 \text{ kg} \cdot \text{mm}$$

y 方向:

$$F_{1I} \cos \alpha_4 - F_{2I} \sin(\alpha_4 + \alpha_1 - 90^\circ) - F_{3I} \cos(\alpha_4 + \alpha_1 + \alpha_2 - 180^\circ) + m_I r_I \sin \theta_I = 0$$

$$m_I r_I \sin \theta_I = -F_{1I} \cos \alpha_4 + F_{2I} \sin(\alpha_4 + \alpha_1 - 90^\circ) + F_{3I} \cos(\alpha_4 + \alpha_1 + \alpha_2 - 180^\circ)$$

$$= -3\,000 \text{ kg} \cdot \text{mm} \times \cos 30^\circ + 1\,500 \text{ kg} \cdot \text{mm} \times \sin 60^\circ +$$

$$666.67 \text{ kg} \cdot \text{mm} \times \cos 30^\circ = -721.69 \text{ kg} \cdot \text{mm}$$

平衡质量为

$$m_I = \frac{\sqrt{1\,916.67^2 + (-721.69)^2}}{r_I} = \frac{2\,048.04}{400} \text{kg} = 5.12 \text{ kg}$$

$$\sin \theta_I = \frac{-721.69}{m_I r_I} = \frac{-721.69}{5.12 \times 400} = -0.35$$

平衡质量的方位角为

$$\theta_I = -20.49^\circ$$

在平衡基面 II 内: 设平衡质量 m_{II} 的向径与 x 轴的夹角为 θ_{II} , 则

$$F_{2II} = m_2 r_2 \frac{l_1}{l_1 + l_2 + l_3} = 15 \times 150 \times \frac{200 r_2}{600 r_2} \text{kg} \cdot \text{mm} = 750 \times \frac{r_2}{r_2} \text{kg} \cdot \text{mm}$$

$$F_{3II} = m_3 r_3 \frac{l_1 + l_2}{l_1 + l_2 + l_3} = 20 \times 100 \times \frac{400 r_3}{600 r_3} \text{kg} \cdot \text{mm} = 1\,333.33 \times \frac{r_3}{r_3} \text{kg} \cdot \text{mm}$$

$$F_{4II} = m_4 r_4 = 10 \times 150 \times \frac{r_4}{r_4} \text{kg} \cdot \text{mm} = 1\,500 \times \frac{r_4}{r_4} \text{kg} \cdot \text{mm}$$

x 方向:

$$-F_{2II} \cos(\alpha_4 + \alpha_1 - 90^\circ) + F_{3II} \sin(\alpha_4 + \alpha_1 + \alpha_2 - 180^\circ) +$$

$$F_{4II} \cos(\alpha_4 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - 270^\circ) + m_{II} r_{II} \cos \theta_{II} = 0$$

$$\begin{aligned}
 m_{\text{II}} r_{\text{II}} \cos \theta_{\text{II}} &= F_{2\text{II}} \cos(\alpha_4 + \alpha_1 - 90^\circ) - F_{3\text{II}} \sin(\alpha_4 + \alpha_1 + \alpha_2 - 180^\circ) - \\
 &\quad F_{4\text{II}} \cos(\alpha_4 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - 270^\circ) \\
 &= 750 \text{ kg} \cdot \text{mm} \times \cos 60^\circ - 1333.33 \text{ kg} \cdot \text{mm} \times \sin 30^\circ - \\
 &\quad 1500 \text{ kg} \cdot \text{mm} \times \cos 30^\circ = -1590.70 \text{ kg} \cdot \text{mm}
 \end{aligned}$$

y 方向:

$$\begin{aligned}
 &-F_{2\text{II}} \sin(\alpha_4 + \alpha_1 - 90^\circ) - F_{3\text{II}} \cos(\alpha_4 + \alpha_1 + \alpha_2 - 180^\circ) + \\
 &\quad F_{4\text{II}} \sin(\alpha_4 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - 270^\circ) + m_{\text{II}} r_{\text{II}} \sin \theta_{\text{II}} = 0 \\
 m_{\text{II}} r_{\text{II}} \sin \theta_{\text{II}} &= F_{2\text{II}} \sin(\alpha_4 + \alpha_1 - 90^\circ) + F_{3\text{II}} \cos(\alpha_4 + \alpha_1 + \alpha_2 - 180^\circ) - \\
 &\quad F_{4\text{II}} \sin(\alpha_4 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - 270^\circ) \\
 &= 750 \text{ kg} \cdot \text{mm} \times \sin 60^\circ + 1333.33 \text{ kg} \cdot \text{mm} \times \cos 30^\circ - \\
 &\quad 1500 \text{ kg} \cdot \text{mm} \times \sin 30^\circ = 1054.22 \text{ kg} \cdot \text{mm}
 \end{aligned}$$

平衡质量为

$$m_{\text{II}} = \frac{\sqrt{(-1590.70)^2 + 1054.22^2}}{r_{\text{II}}} = \frac{1908.33}{400} \text{ kg} = 4.77 \text{ kg}$$

$$\cos \theta_{\text{II}} = \frac{-1590.70}{m_{\text{II}} r_{\text{II}}} = \frac{-1590.70}{4.77 \times 400} = -0.83$$

平衡质量的方位角为

$$\theta_{\text{II}} = 146.10^\circ$$

习题 11-6 如图 11-10 所示,用去重法平衡同轴转子 1 及带轮 2,已知其上 3 个偏心质量和所在位置半径分别为: $m_1 = 0.3 \text{ kg}$, $m_2 = 0.1 \text{ kg}$, $m_3 = 0.2 \text{ kg}$, $r_1 = 90 \text{ mm}$, $r_2 = 200 \text{ mm}$, $r_3 = 150 \text{ mm}$; $l_1 = 20 \text{ mm}$, $l_2 = 80 \text{ mm}$, $l_3 = 100 \text{ mm}$, $l = 300 \text{ mm}$; $\alpha_2 = 45^\circ$, $\alpha_3 = 30^\circ$ 。取转子两端面 I 和 II 为平衡基面,去重半径为 230 mm。求应去除的不平衡质量的大小及方位。

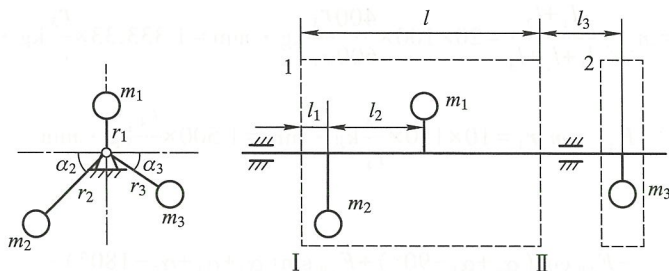


图 11-10

【解题思路及技巧】

首先将各个偏心质量所产生的惯性力向两个平衡基面上分解(图 11-11), 然后在两个平衡基面上分别运用静平衡方程式求解。注意两个平衡基面位于偏心质量 m_3 的同一侧时, 在距偏心质量 m_3 较远的平衡基面(平衡基面 I)上, 偏心质量 m_3 所产生的惯性力 F_3 的分解力 F_{3I} 为负值。即在距偏心质量较远的平衡基面(平衡基面 I)上惯性力 F_3 的分解力 F_{3I} 与惯性力 F_3 的方向相反。

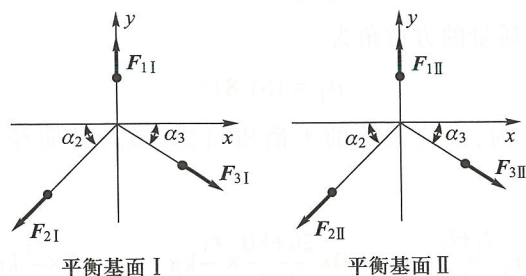


图 11-11

【解题过程】

在平衡基面 I 内: 设应去除的平衡质量为 $-m_I$, 其向径与 x 轴的夹角为 θ_I , 则

$$F_{1I} = m_I r_I \frac{l-l_1-l_2}{l} = 0.3 \times 90 \times \frac{300-20-80}{300} \times \frac{r_1}{r_1} \text{ kg} \cdot \text{mm} = 18 \times \frac{r_1}{r_1} \text{ kg} \cdot \text{mm}$$

$$F_{2I} = m_2 r_2 \frac{l-l_1}{l} = 0.1 \times 200 \times \frac{300-20}{300} \times \frac{r_2}{r_2} \text{ kg} \cdot \text{mm} = 18.67 \times \frac{r_2}{r_2} \text{ kg} \cdot \text{mm}$$

$$F_{3I} = m_3 r_3 \frac{-l_3}{l} = 0.2 \times 150 \times \frac{-100}{300} \times \frac{r_3}{r_3} \text{ kg} \cdot \text{mm} = -10 \times \frac{r_3}{r_3} \text{ kg} \cdot \text{mm}$$

x 方向:

$$-F_{2I} \cos \alpha_2 + F_{3I} \cos \alpha_3 - m_I r_I \cos \theta_I = 0$$

$$m_I r_I \cos \theta_I = -F_{2I} \cos \alpha_2 + F_{3I} \cos \alpha_3$$

$$= -18.67 \text{ kg} \cdot \text{mm} \times \cos 45^\circ - 10 \text{ kg} \cdot \text{mm} \times \cos 30^\circ = -21.86 \text{ kg} \cdot \text{mm}$$

y 方向:

$$F_{1I} - F_{2I} \sin \alpha_2 - F_{3I} \sin \alpha_3 - m_I r_I \sin \theta_I = 0$$

$$m_I r_I \sin \theta_I = F_{1I} - F_{2I} \sin \alpha_2 - F_{3I} \sin \alpha_3$$

$$= 18 \text{ kg} \cdot \text{mm} - 18.67 \text{ kg} \cdot \text{mm} \times \sin 45^\circ + 10 \text{ kg} \cdot \text{mm} \times \sin 30^\circ$$

$$= 9.80 \text{ kg} \cdot \text{mm}$$

应去除的平衡质量为

$$m = \frac{\sqrt{(-21.86)^2 + 9.80^2}}{r} = \frac{23.96}{230} \text{ kg} = 0.1 \text{ kg}$$

$$\cos \theta_I = \frac{-21.86}{m_I r_I} = \frac{-21.86}{0.1 \times 230} = -0.95$$

应去除的平衡质量的方位角为

$$\theta_I = 161.81^\circ$$

在平衡基面 II 内: 设应去除的平衡质量为 $-m_{II}$, 其向径与 x 轴的夹角为 θ_{II} , 则

$$F_{1II} = m_1 r_1 \frac{l_1 + l_2}{l} = 0.3 \times 90 \times \frac{20 + 80}{300} \times \frac{r_1}{r_1} \text{ kg} \cdot \text{mm} = 9 \times \frac{r_1}{r_1} \text{ kg} \cdot \text{mm}$$

$$F_{2II} = m_2 r_2 \frac{l_1}{l} = 0.1 \times 200 \times \frac{20}{300} \times \frac{r_2}{r_2} \text{ kg} \cdot \text{mm} = 1.33 \times \frac{r_2}{r_2} \text{ kg} \cdot \text{mm}$$

$$F_{3I} = m_3 r_3 \frac{l + l_3}{l} = 0.2 \times 150 \times \frac{300 + 100}{300} \times \frac{r_3}{r_3} \text{ kg} \cdot \text{mm} = 40 \times \frac{r_3}{r_3} \text{ kg} \cdot \text{mm}$$

x 方向:

$$-F_{2II} \cos \alpha_2 + F_{3II} \cos \alpha_3 - m_{II} r_{II} \cos \theta_{II} = 0$$

$$m_{II} r_{II} \cos \theta_{II} = -F_{2II} \cos \alpha_2 + F_{3II} \cos \alpha_3$$

$$= -1.33 \text{ kg} \cdot \text{mm} \times \cos 45^\circ + 40 \text{ kg} \cdot \text{mm} \times \cos 30^\circ = 33.70 \text{ kg} \cdot \text{mm}$$

y 方向:

$$F_{1II} - F_{2II} \sin \alpha_2 - F_{3II} \sin \alpha_3 - m_{II} r_{II} \sin \theta_{II} = 0$$

$$m_{II} r_{II} \sin \theta_{II} = F_{1II} - F_{2II} \sin \alpha_2 - F_{3II} \sin \alpha_3$$

$$= 9 \text{ kg} \cdot \text{mm} - 1.33 \text{ kg} \cdot \text{mm} \times \sin 45^\circ - 40 \text{ kg} \cdot \text{mm} \times \sin 30^\circ$$

$$= -11.94 \text{ kg} \cdot \text{mm}$$

应去除的平衡质量为

$$m_{II} = \frac{\sqrt{33.70^2 + (-11.94)^2}}{r_{II}} = \frac{35.75}{230} \text{ kg} = 0.16 \text{ kg}$$

$$\sin \theta_{\text{II}} = \frac{-11.94}{m_{\text{II}} r_{\text{II}}} = \frac{-11.94}{0.16 \times 230} = -0.32$$

应去除的平衡质量的方位角为

$$\theta_{\text{II}} = -18.66^\circ$$

习题 11-7 图 11-12 所示转子中,已知其上两个偏心质量和所在位置半径分别为 $m_1 = 1.8 \text{ kg}$, $m_2 = 2.7 \text{ kg}$, $r_1 = 133 \text{ mm}$, $r_2 = 102 \text{ mm}$ 。偏心质量的方位角为 $\theta_1 = 210^\circ$, $\theta_2 = 90^\circ$ 。又知各偏心质量的轴向位置为: $l_1 = 178 \text{ mm}$, $l_2 = 401 \text{ mm}$, $l_3 = 102 \text{ mm}$ 。取转子两端面 I 和 II 为平衡基面,在端面 I 内增加回转半径为 $r_{e1} = 76 \text{ mm}$ 的平衡质量 m_{e1} ,在端面 II 内增加回转半径为 $r_{e2} = 89 \text{ mm}$ 的平衡质量 m_{e2} ,通过解析法和图解法试求平衡质量 m_{e1} 和 m_{e2} 的大小及方位。

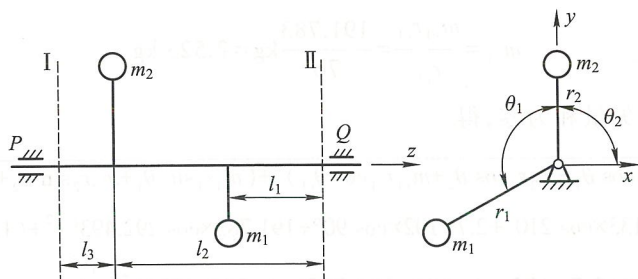


图 11-12

【解题思路及技巧】

本题除先将各个偏心质量所产生的惯性力向两个平衡基面上分解,然后在两个平衡基面上分别运用静平衡方程式求解外,还可直接用文献[1]中按惯性力矩平衡推导出的公式(11-9),求出其中一个平衡基面内平衡质量的质径积和方位角,然后再用按惯性力平衡推导出的公式(11-6)求出另一个平衡基面内平衡质量的质径积和方位角。本题采用第二种方法求解。

【解题过程】

(1) 解析法

设平衡基面 I 与轴线的交点为 P,平衡基面 II 与轴线的交点为 Q。根据力矩平衡方程,对点 Q 处的惯性力求矩,并将其分解在 x 和 y 两个方向上,得

$$x \text{ 方向: } m_1 l_1 r_1 \cos \theta_1 + m_2 l_2 r_2 \cos \theta_2 + m_{e1} l_{e1} r_{e1} \cos \theta_{e1} = 0$$

$$y \text{ 方向: } m_1 l_1 r_1 \sin \theta_1 + m_2 l_2 r_2 \sin \theta_2 + m_{e1} l_{e1} r_{e1} \sin \theta_{e1} = 0$$

将已知条件代入上述两式并整理,得

$$\begin{aligned}
 m_{e1}r_{e1} &= \frac{\sqrt{(m_1r_1l_1\cos\theta_1+m_2r_2l_2\cos\theta_2)^2+(m_1r_1l_1\sin\theta_1+m_2r_2l_2\sin\theta_2)^2}}{l_2+l_3} \\
 &= \frac{\sqrt{(1.8\times 133\times 178\times \cos 210^\circ+2.7\times 102\times 401\times \cos 90^\circ)^2+(1.8\times 133\times 178\times \sin 210^\circ+2.7\times 102\times 401\times \sin 90^\circ)^2}}{401+102} \text{ kg}\cdot\text{mm} \\
 &= \frac{\sqrt{1\,361\,913\,610.68+7\,943\,942\,989.44}}{503} \text{ kg}\cdot\text{mm} = \frac{96\,466.87}{503} \text{ kg}\cdot\text{mm} \\
 &= 191.783 \text{ kg}\cdot\text{mm}
 \end{aligned}$$

$$\theta_{e1} = \arctan \frac{-m_1r_1l_1\sin\theta_1-m_2r_2l_2\sin\theta_2}{-m_1r_1l_1\cos\theta_1-m_2r_2l_2\cos\theta_2} = \arctan \frac{-89\,128.8}{36\,904.1} = 292.493^\circ$$

因 $r_{e1} = 76 \text{ mm}$, 所以

$$m_{e1} = \frac{m_{e1}r_{e1}}{r_{e1}} = \frac{191.783}{76} \text{ kg} = 2.523 \text{ kg}$$

根据惯性力的矢量和为零, 得

$$\begin{aligned}
 m_{e2}r_{e2} &= \sqrt{(m_1r_1\cos\theta_1+m_2r_2\cos\theta_2+m_{e1}r_{e1}\cos\theta_{e1})^2+(m_1r_1\sin\theta_1+m_2r_2\sin\theta_2+m_{e1}r_{e1}\sin\theta_{e1})^2} \\
 &= [(1.8\times 133\times \cos 210^\circ+2.7\times 102\times \cos 90^\circ+191.783\times \cos 292.493^\circ)^2+(1.8\times 133\times \\
 &\quad \sin 210^\circ+2.7\times 102\times \sin 90^\circ+191.783\times \sin 292.493^\circ)^2]^{\frac{1}{2}} \text{ kg}\cdot\text{mm} \\
 &= \sqrt{(-133.956)^2+(-21.493)^2} \text{ kg}\cdot\text{mm} = 135.67 \text{ kg}\cdot\text{mm}
 \end{aligned}$$

$$\theta_{e2} = \arctan \frac{-m_1r_1\sin\theta_1-m_2r_2\sin\theta_2-m_{e1}r_{e1}\sin\theta_{e1}}{-m_1r_1\cos\theta_1-m_2r_2\cos\theta_2-m_{e1}r_{e1}\cos\theta_{e1}} = \arctan \frac{21.493}{133.956} = 9.116^\circ$$

因 $r_{e2} = 89 \text{ mm}$, 所以

$$m_{e2} = \frac{m_{e2}r_{e2}}{r_{e2}} = \frac{135.67}{89} = 1.524 \text{ kg}$$

(2) 图解法

1) 求平衡基面 I 内的平衡质量和方位角

设平衡基面 I 与轴线的交点为 P , 平衡基面 II 与轴线的交点为 Q , 则

$$m_1r_1l_1 = 1.8\times 133\times 178 \text{ kg}\cdot\text{mm}^2 = 42\,613.2 \text{ kg}\cdot\text{mm}^2$$

$$m_2r_2l_2 = 2.7\times 102\times 401 \text{ kg}\cdot\text{mm}^2 = 110\,435.4 \text{ kg}\cdot\text{mm}^2$$

如图 11-13a 所示, 选定比例尺 $\mu \left(\frac{\text{实际质径积矩大小}/(\text{kg}\cdot\text{m}^2)}{\text{图上的尺寸}/\text{mm}} \right)$, 从任意

点 a 开始按向径 r_1 、 r_2 的方向连续作 $\overline{ab}$ 、 $\overline{bc}$ 、分别代表质径积 $m_1 r_1 l_1$ 、 $m_2 r_2 l_2$ 的大小和方向,经测量求得

$$m_{c1} r_{c1} l_{c1} = \mu \overline{ca} = 96\,466.87 \text{ kg} \cdot \text{mm}^2$$

所以,

$$m_{c1} r_{c1} = \frac{m_{c1} r_{c1} l_{c1}}{l_{c1}} = \frac{m_{c1} r_{c1} l_{c1}}{l_2 + l_3} = \frac{96\,466.87}{503} \text{ kg} \cdot \text{mm} = 191.783 \text{ kg} \cdot \text{mm}$$

因 $r_{c1} = 76 \text{ mm}$, 所以

$$m_{c1} = \frac{m_{c1} r_{c1}}{r_{c1}} = \frac{191.783}{76} \text{ kg} = 2.523 \text{ kg}$$

据图 11-13a 测量, 得 m_{c1} 的方位角为

$$\theta_{c1} = 292.493^\circ$$

2) 求平衡基面 II 内的平衡质量和方位角

因

$$m_1 r_1 = 1.8 \times 133 \text{ kg} \cdot \text{mm} = 239.4 \text{ kg} \cdot \text{mm}$$

$$m_2 r_2 = 2.7 \times 102 \text{ kg} \cdot \text{mm} = 275.4 \text{ kg} \cdot \text{mm}$$

$$m_{c1} r_{c1} = 191.783 \text{ kg} \cdot \text{mm}$$

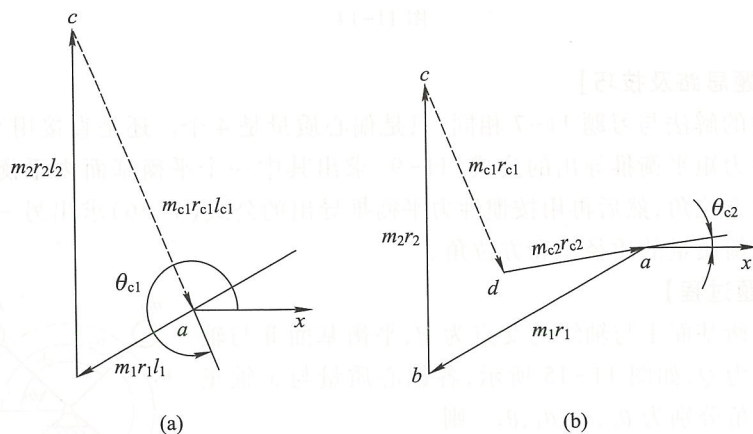


图 11-13

如图 11-13b 所示, 选定比例尺 $\mu \left(\frac{\text{实际质径积大小}/(\text{kg} \cdot \text{m})}{\text{图上的尺寸}/\text{mm}} \right)$, 从任意点 a

开始按向径 r_1 、 r_2 、 r_{c1} 的方向连续作 $\overline{ab}$ 、 $\overline{bc}$ 、 $\overline{cd}$, 分别代表质径积 $m_1 r_1$ 、 $m_2 r_2$ 、 $m_{c1} r_{c1}$ 的大小和方向, 经测量求得

$$m_{c2} r_{c2} = \mu \overline{da} = 135.67 \text{ kg} \cdot \text{mm}$$

因 $r_{c2} = 89 \text{ mm}$, 所以

$$m_{c2} = \frac{m_{c2} r_{c2}}{r_{c2}} = \frac{135.67}{89} \text{ kg} = 1.524 \text{ kg}$$

由图 11-13b 测量, 得 m_{c2} 的方位角 θ_{c2} 为

$$\theta_{c2} = 9.116^\circ$$

习题 11-8 图 11-14 所示为四摆曲轴, 已知其特性如下: $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = 10 \text{ kg}$, $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = 40 \text{ mm}$ 。各偏心质量的相位和轴向位置如图所示: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 90^\circ$; $l_1 = 50 \text{ mm}$, $l_2 = 150 \text{ mm}$, $l_3 = 250 \text{ mm}$, $l_4 = 350 \text{ mm}$, $l = 50 \text{ mm}$ 。如选择两个端面 I 和 II 作为平衡基面, 求所需加的平衡质径积的大小和方位。

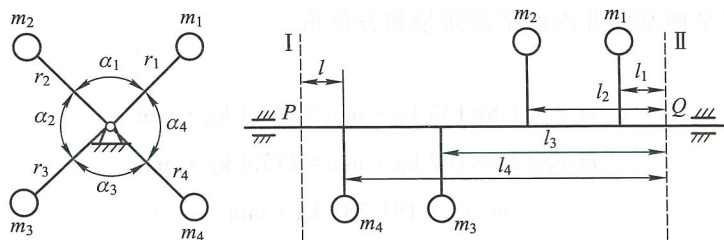


图 11-14

【解题思路及技巧】

本题的解法与习题 11-7 相同, 只是偏心质量是 4 个。还是直接用文献[1]中按惯性力矩平衡推导出的公式 (11-9) 求出其中一个平衡基面内平衡质量的质径积和方位角, 然后再用按惯性力平衡推导出的公式 (11-6) 求出另一个平衡基面内平衡质量的质径积和方位角。

【解题过程】

设平衡基面 I 与轴线的交点为 P, 平衡基面 II 与轴线的交点为 Q, 如图 11-15 所示, 各偏心质量与 x 轴正方向的夹角分别为 θ_1 、 θ_2 、 θ_3 、 θ_4 。则

$$\theta_1 = \alpha_4 / 2 = 45^\circ$$

$$\theta_2 = \alpha_4 / 2 + \alpha_1 = 135^\circ$$

$$\theta_3 = \alpha_4 / 2 + \alpha_1 + \alpha_2 = 225^\circ$$

$$\theta_4 = \alpha_4 / 2 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 315^\circ$$

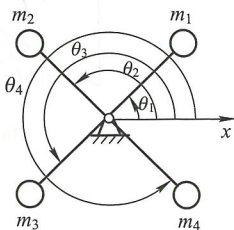


图 11-15

根据力矩平衡方程,对点 Q 处的惯性力求矩,并将其分解在 x 和 y 两个方向上,得

x 方向:

$$m_1 r_1 l_1 \cos \theta_1 + m_2 r_2 l_2 \cos \theta_2 + m_3 r_3 l_3 \cos \theta_3 + m_4 r_4 l_4 \cos \theta_4 + m_{c1} r_{c1} l_{c1} \cos \theta_{c1} = 0$$

y 方向:

$$m_1 r_1 l_1 \sin \theta_1 + m_2 r_2 l_2 \sin \theta_2 + m_3 r_3 l_3 \sin \theta_3 + m_4 r_4 l_4 \sin \theta_4 + m_{c1} r_{c1} l_{c1} \sin \theta_{c1} = 0$$

将已知条件代入上述两式并整理,得

$$\begin{aligned} m_{c1} r_{c1} &= \frac{1}{l_4 + l} \left[(m_1 r_1 l_1 \cos \theta_1 + m_2 r_2 l_2 \cos \theta_2 + m_3 r_3 l_3 \cos \theta_3 + m_4 r_4 l_4 \cos \theta_4)^2 + \right. \\ &\quad \left. (m_1 r_1 l_1 \sin \theta_1 + m_2 r_2 l_2 \sin \theta_2 + m_3 r_3 l_3 \sin \theta_3 + m_4 r_4 l_4 \sin \theta_4)^2 \right]^{1/2} \\ &= \frac{1}{400} \left[(10 \times 40 \times 50 \times \cos 45^\circ + 10 \times 40 \times 150 \times \cos 135^\circ + 10 \times 40 \times 250 \times \right. \\ &\quad \left. \cos 225^\circ + 10 \times 40 \times 350 \times \cos 315^\circ)^2 + (10 \times 40 \times 50 \times \sin 45^\circ + 10 \times 40 \times 150 \times \right. \\ &\quad \left. \sin 135^\circ + 10 \times 40 \times 250 \times \sin 225^\circ + 10 \times 40 \times 350 \times \sin 315^\circ)^2 \right]^{1/2} \text{ kg} \cdot \text{mm} \\ &= 200\sqrt{2} = 282.84 \text{ kg} \cdot \text{mm} \end{aligned}$$

$$\theta_{c1} = \arctan \frac{-(m_1 r_1 l_1 \sin \theta_1 + m_2 r_2 l_2 \sin \theta_2 + m_3 r_3 l_3 \sin \theta_3 + m_4 r_4 l_4 \sin \theta_4)}{-(m_1 r_1 l_1 \cos \theta_1 + m_2 r_2 l_2 \cos \theta_2 + m_3 r_3 l_3 \cos \theta_3 + m_4 r_4 l_4 \cos \theta_4)} = 90^\circ$$

根据惯性力的矢量和为零,得

$$\begin{aligned} m_{c2} r_{c2} &= \left[(m_1 r_1 \cos \theta_1 + m_2 r_2 \cos \theta_2 + m_3 r_3 \cos \theta_3 + m_4 r_4 \cos \theta_4 + m_{c1} r_{c1} \cos \theta_{c1})^2 + \right. \\ &\quad \left. (m_1 r_1 \sin \theta_1 + m_2 r_2 \sin \theta_2 + m_3 r_3 \sin \theta_3 + m_4 r_4 \sin \theta_4 + m_{c1} r_{c1} \sin \theta_{c1})^2 \right]^{1/2} \\ &= \left[(m_{c1} r_{c1} \sin \theta_{c1})^2 \right]^{1/2} = 200\sqrt{2} \text{ kg} \cdot \text{mm} = 282.84 \text{ kg} \cdot \text{mm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta_{c2} &= \arctan \left[\frac{-(m_1 r_1 \sin \theta_1 + m_2 r_2 \sin \theta_2 + m_3 r_3 \sin \theta_3 + m_4 r_4 \sin \theta_4 + m_{c1} r_{c1} \sin \theta_{c1})}{-(m_1 r_1 \cos \theta_1 + m_2 r_2 \cos \theta_2 + m_3 r_3 \cos \theta_3 + m_4 r_4 \cos \theta_4 + m_{c1} r_{c1} \cos \theta_{c1})} \right] \\ &= -90^\circ \end{aligned}$$

因此,若取两平衡质量均为 10 kg,则平衡质量 m_{c1} 可放置于平面 I 内平衡向径 28.28 mm 处,且与水平轴夹角为 90° 。平衡质量 m_{c2} 可放置于平面 II 内平衡向径 28.28 mm 处,且与水平轴夹角为 -90° 。

习题 11-9 图 11-16 所示大型转子沿轴向有 3 个偏心质量,其质量和所在位置半径分别为: $m_1 = 4 \text{ kg}$, $m_2 = 2 \text{ kg}$, $m_3 = 3 \text{ kg}$, $r_1 = 160 \text{ mm}$, $r_2 = 200 \text{ mm}$, $r_3 = 150 \text{ mm}$ 。各偏心质量的相位和轴向位置如图示: $\alpha_2 = 15^\circ$, $\alpha_3 = 30^\circ$, $l_1 = 200 \text{ mm}$,

$l_2 = 400 \text{ mm}$, $l_3 = 200 \text{ mm}$, $l_4 = 150 \text{ mm}$ 。如选择转子两个端面 I 和 II 为平衡基面, 求所需加的平衡质径积的大小和方位。如选端面 II 及转子中截面 III 为平衡基面, 质径积的大小有何改变?

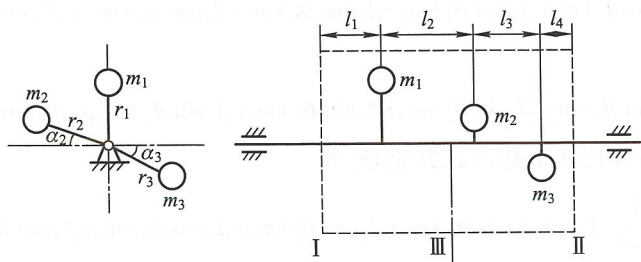


图 11-16

【解题思路及技巧】

首先将各个偏心质量所产生的惯性力向两个平衡基面上分解, 然后在两个平衡基面上分别运用静平衡方程式求解。注意偏心质量在两个平衡基面以外和在两个平衡基面之间这两种情况下, 其惯性力向两个平衡基面分解时计算结果的差别。

【解题过程】

(1) 选 I 和 II 为平衡基面

如图 11-17 所示, 在平衡基面 I 内, 设应加的平衡质量为 m_I , 其向径与 x 轴的夹角为 θ_I , 设平衡基面 I 和 II 的距离为

$$l_{I, II} = l_1 + l_2 + l_3 + l_4$$

$$F_{1I} = m_I r_I \frac{l_2 + l_3 + l_4}{l_{I, II}} = 4 \times 160 \times \frac{400 + 200 + 150}{950} \times \frac{r_1}{r_I} \text{ kg} \cdot \text{mm} = 505.26 \times \frac{r_1}{r_I} \text{ kg} \cdot \text{mm}$$

$$F_{2I} = m_2 r_2 \frac{l_3 + l_4}{l_{I, II}} = 2 \times 200 \times \frac{200 + 150}{950} \times \frac{r_2}{r_2} \text{ kg} \cdot \text{mm} = 147.37 \times \frac{r_2}{r_2} \text{ kg} \cdot \text{mm}$$

$$F_{3I} = m_3 r_3 \frac{l_4}{l_{I, II}} = 3 \times 150 \times \frac{150}{950} \times \frac{r_3}{r_3} \text{ kg} \cdot \text{mm} = 71.05 \times \frac{r_3}{r_3} \text{ kg} \cdot \text{mm}$$

x 方向:

$$-F_{2I} \cos \alpha_2 + F_{3I} \cos \alpha_3 + m_I r_I \cos \theta_I = 0$$

$$m_I r_I \cos \theta_I = F_{2I} \cos \alpha_2 - F_{3I} \cos \alpha_3$$

$$= 147.37 \text{ kg} \cdot \text{mm} \times \cos 15^\circ - 71.05 \text{ kg} \cdot \text{mm} \times \cos 30^\circ$$

$$= 80.82 \text{ kg} \cdot \text{mm}$$

y 方向:

$$\begin{aligned} F_{1I} + F_{2I} \sin \alpha_2 - F_{3I} \sin \alpha_3 + m_I r_I \sin \theta_I &= 0 \\ m_I r_I \sin \theta_I &= -F_{1I} - F_{2I} \sin \alpha_2 + F_{3I} \sin \alpha_3 \\ &= -505.26 \text{ kg} \cdot \text{mm} - 147.37 \text{ kg} \cdot \text{mm} \times \sin 15^\circ + 71.05 \text{ kg} \cdot \text{mm} \times \\ &\quad \sin 30^\circ = -507.88 \text{ kg} \cdot \text{mm} \end{aligned}$$

应加的平衡质径积为

$$m_I r_I = \sqrt{80.82^2 + (-507.88)^2} \text{ kg} \cdot \text{mm} = 514.27 \text{ kg} \cdot \text{mm}$$

$$\sin \theta_I = \frac{-507.88}{514.27} = -0.99$$

应加的平衡质径积的方位角为

$$\theta_I = -81.89^\circ$$

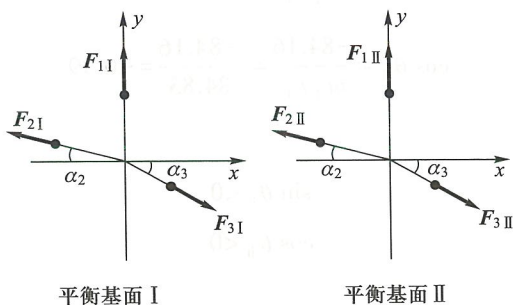


图 11-17

在平衡基面 II 内: 设应加的平衡质量为 m_{II} , 其向径与 x 轴的夹角为 θ_{II} , 则

$$F_{1II} = m_I r_I \frac{l_1}{l_{I,II}} = 4 \times 160 \times \frac{200}{950} \times \frac{r_1}{r_1} \text{ kg} \cdot \text{mm} = 134.74 \times \frac{r_1}{r_1} \text{ kg} \cdot \text{mm}$$

$$F_{2II} = m_2 r_2 \frac{l_1 + l_2}{l_{I,II}} = 2 \times 200 \times \frac{200 + 400}{950} \times \frac{r_2}{r_2} \text{ kg} \cdot \text{mm} = 252.63 \times \frac{r_2}{r_2} \text{ kg} \cdot \text{mm}$$

$$F_{3II} = m_3 r_3 \frac{l_1 + l_2 + l_3}{l_{I,II}} = 3 \times 150 \times \frac{200 + 400 + 200}{950} \times \frac{r_3}{r_3} \text{ kg} \cdot \text{mm} = 378.95 \times \frac{r_3}{r_3} \text{ kg} \cdot \text{mm}$$

x 方向:

$$\begin{aligned} -F_{2II} \cos \alpha_2 + F_{3II} \cos \alpha_3 + m_{II} r_{II} \cos \theta_{II} &= 0 \\ m_{II} r_{II} \cos \theta_{II} &= F_{2II} \cos \alpha_2 - F_{3II} \cos \alpha_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 252.63 \text{ kg} \cdot \text{mm} \times \cos 15^\circ - 378.95 \text{ kg} \cdot \text{mm} \times \cos 30^\circ \\
 &= -84.16 \text{ kg} \cdot \text{mm}
 \end{aligned}$$

y 方向:

$$\begin{aligned}
 F_{1\text{II}} + F_{2\text{II}} \sin \alpha_2 - F_{3\text{II}} \sin \alpha_3 + m_{\text{II}} r_{\text{II}} \sin \theta_{\text{II}} &= 0 \\
 m_{\text{II}} r_{\text{II}} \sin \theta_{\text{II}} &= -F_{1\text{II}} - F_{2\text{II}} \sin \alpha_2 + F_{3\text{II}} \sin \alpha_3 \\
 &= -134.74 \text{ kg} \cdot \text{mm} - 252.63 \text{ kg} \cdot \text{mm} \times \sin 15^\circ + 378.95 \text{ kg} \cdot \text{mm} \times \\
 &\quad \sin 30^\circ = -10.65 \text{ kg} \cdot \text{mm}
 \end{aligned}$$

应加的平衡质径积为

$$m_{\text{II}} r_{\text{II}} = \sqrt{(-84.16)^2 + (-10.65)^2} \text{ kg} \cdot \text{mm} = 84.83 \text{ kg} \cdot \text{mm}$$

$$\sin \theta_{\text{II}} = \frac{-10.65}{m_{\text{II}} r_{\text{II}}} = \frac{-10.65}{84.83} = -0.13$$

$$\cos \theta_{\text{II}} = \frac{-84.16}{m_{\text{II}} r_{\text{II}}} = \frac{-84.16}{84.83} = -0.99$$

由于

$$\sin \theta_{\text{II}} < 0$$

$$\cos \theta_{\text{II}} < 0$$

因此

$$180^\circ < \theta_{\text{II}} < 270^\circ$$

$$\sin \theta_{\text{II}} = \sin(180^\circ + \theta_x) = -\sin \theta_x = -0.13$$

$$\sin \theta_x = 0.13$$

$$\theta_x = 7.47^\circ$$

应加的平衡质径积的方位角为

$$\theta_{\text{II}} = 180^\circ + \theta_x = 180^\circ + 7.47^\circ = 187.47^\circ$$

(2) 选Ⅲ、Ⅱ为平衡基面

如图 11-18 所示,在平衡基面Ⅲ内:设应加的平衡质量为 m_{III} ,其向径与 x 轴的夹角为 θ_{III} 。

设平衡基面Ⅲ和Ⅱ的距离为 $l_{\text{III, II}}$,则

$$F_{1\text{III}} = m_1 r_1 \frac{l_2 + l_3 + l_4}{l_{\text{III, II}}} = m_1 r_1 \frac{l_2 + l_3 + l_4}{l_{\text{III, II}}} \frac{l_{1, \text{II}}}{l_{1, \text{II}}} = F_{1\text{I}} \frac{l_{1, \text{II}}}{l_{\text{III, II}}}$$

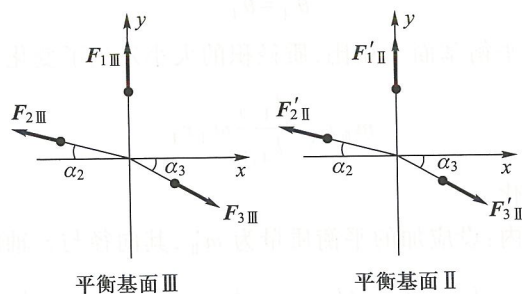


图 11-18

$$F_{2III} = m_2 r_2 \frac{l_3 + l_4}{l_{III, II}} = m_2 r_2 \frac{l_3 + l_4}{l_{III, II}} \frac{l_{I, II}}{l_{I, II}} = F_{2I} \frac{l_{I, II}}{l_{III, II}}$$

$$F_{3III} = m_3 r_3 \frac{l_4}{l_{III, II}} = m_3 r_3 \frac{l_4}{l_{III, II}} \frac{l_{I, II}}{l_{I, II}} = F_{3I} \frac{l_{I, II}}{l_{III, II}}$$

x 方向:

$$-F_{2III} \cos \alpha_2 + F_{3III} \cos \alpha_3 + m_{III} r_{III} \cos \theta_{III} = 0$$

$$m_{III} r_{III} \cos \theta_{III} = F_{2III} \cos \alpha_2 - F_{3III} \cos \alpha_3 = \frac{l_{I, II}}{l_{III, II}} (F_{2I} \cos \alpha_2 - F_{3I} \cos \alpha_3)$$

$$= \frac{l_{I, II}}{l_{III, II}} m_I r_I \cos \theta_I$$

y 方向:

$$F_{1III} + F_{2III} \sin \alpha_2 - F_{3III} \sin \alpha_3 + m_{III} r_{III} \sin \theta_{III} = 0$$

$$m_{III} r_{III} \sin \theta_{III} = -F_{1III} - F_{2III} \sin \alpha_2 + F_{3III} \sin \alpha_3 = \frac{l_{I, II}}{l_{III, II}} (-F_{1I} - F_{2I} \sin \alpha_2 + F_{3I} \sin \alpha_3)$$

$$= \frac{l_{I, II}}{l_{III, II}} m_I r_I \sin \theta_I$$

应加的平衡质径积为

$$m_{III} r_{III} = \frac{l_{I, II}}{l_{III, II}} m_I r_I$$

$$\sin \theta_{III} = \sin \theta_I$$

应加的平衡质径积的方位角为

$$\theta_{\text{III}} = \theta_{\text{I}}$$

平衡基面 III 与平衡基面 I 相比,质径积的大小发生了变化,其变化关系为

$$m_{\text{III}} r_{\text{III}} = \frac{l_{\text{I}, \text{II}}}{l_{\text{III}, \text{II}}} m_{\text{I}} r_{\text{I}}$$

但是方位角没有变化。

在平衡基面 II 内:设应加的平衡质量为 m'_{II} , 其向径与 x 轴的夹角为 θ'_{II} , 则

$$\begin{aligned} F'_{1\text{II}} &= m_1 r_1 \frac{l_{\text{III}, \text{II}} - l_{\text{I}, \text{II}} + l_1}{l_{\text{III}, \text{II}}} = m_1 r_1 \frac{l_{\text{III}, \text{II}} - l_{\text{I}, \text{II}}}{l_{\text{III}, \text{II}}} + m_1 r_1 \frac{l_1}{l_{\text{III}, \text{II}}} \frac{l_{\text{I}, \text{II}}}{l_{\text{I}, \text{II}}} \\ &= m_1 r_1 \frac{l_{\text{III}, \text{II}} - l_{\text{I}, \text{II}}}{l_{\text{III}, \text{II}}} + F_{1\text{II}} \frac{l_{\text{I}, \text{II}}}{l_{\text{III}, \text{II}}} \\ F'_{2\text{II}} &= m_2 r_2 \frac{l_{\text{III}, \text{II}} - l_{\text{I}, \text{II}} + l_1 + l_2}{l_{\text{III}, \text{II}}} = m_2 r_2 \frac{l_{\text{III}, \text{II}} - l_{\text{I}, \text{II}}}{l_{\text{III}, \text{II}}} + m_2 r_2 \frac{l_1 + l_2}{l_{\text{III}, \text{II}}} \frac{l_{\text{I}, \text{II}}}{l_{\text{I}, \text{II}}} \\ &= m_2 r_2 \frac{l_{\text{III}, \text{II}} - l_{\text{I}, \text{II}}}{l_{\text{III}, \text{II}}} + F_{2\text{II}} \frac{l_{\text{I}, \text{II}}}{l_{\text{III}, \text{II}}} \\ F'_{3\text{II}} &= m_3 r_3 \frac{l_{\text{III}, \text{II}} - l_{\text{I}, \text{II}} + l_1 + l_2 + l_3}{l_{\text{III}, \text{II}}} = m_3 r_3 \frac{l_{\text{III}, \text{II}} - l_{\text{I}, \text{II}}}{l_{\text{III}, \text{II}}} + m_3 r_3 \frac{l_1 + l_2 + l_3}{l_{\text{III}, \text{II}}} \frac{l_{\text{I}, \text{II}}}{l_{\text{I}, \text{II}}} \\ &= m_3 r_3 \frac{l_{\text{III}, \text{II}} - l_{\text{I}, \text{II}}}{l_{\text{III}, \text{II}}} + F_{3\text{II}} \frac{l_{\text{I}, \text{II}}}{l_{\text{III}, \text{II}}} \end{aligned}$$

x 方向:

$$-F'_{2\text{II}} \cos \alpha_2 + F'_{3\text{II}} \cos \alpha_3 + m'_{\text{II}} r'_{\text{II}} \cos \theta'_{\text{II}} = 0$$

$$m'_{\text{II}} r'_{\text{II}} \cos \theta'_{\text{II}} = F'_{2\text{II}} \cos \alpha_2 - F'_{3\text{II}} \cos \alpha_3$$

$$\begin{aligned} &= \left(m_2 r_2 \frac{l_{\text{III}, \text{II}} - l_{\text{I}, \text{II}}}{l_{\text{III}, \text{II}}} + F_{2\text{II}} \frac{l_{\text{I}, \text{II}}}{l_{\text{III}, \text{II}}} \right) \cos \alpha_2 - \left(m_3 r_3 \frac{l_{\text{III}, \text{II}} - l_{\text{I}, \text{II}}}{l_{\text{III}, \text{II}}} + F_{3\text{II}} \frac{l_{\text{I}, \text{II}}}{l_{\text{III}, \text{II}}} \right) \cos \alpha_3 \\ &= \left(m_2 r_2 \frac{l_{\text{III}, \text{II}} - l_{\text{I}, \text{II}}}{l_{\text{III}, \text{II}}} \cos \alpha_2 - m_3 r_3 \frac{l_{\text{III}, \text{II}} - l_{\text{I}, \text{II}}}{l_{\text{III}, \text{II}}} \cos \alpha_3 \right) + \left(F_{2\text{II}} \frac{l_{\text{I}, \text{II}}}{l_{\text{III}, \text{II}}} \cos \alpha_2 - F_{3\text{II}} \frac{l_{\text{I}, \text{II}}}{l_{\text{III}, \text{II}}} \cos \alpha_3 \right) \\ &= \left(m_2 r_2 \frac{l_{\text{III}, \text{II}} - l_{\text{I}, \text{II}}}{l_{\text{III}, \text{II}}} \cos \alpha_2 - m_3 r_3 \frac{l_{\text{III}, \text{II}} - l_{\text{I}, \text{II}}}{l_{\text{III}, \text{II}}} \cos \alpha_3 \right) + \frac{l_{\text{I}, \text{II}}}{l_{\text{III}, \text{II}}} m_{\text{II}} r_{\text{II}} \cos \theta_{\text{II}} \\ &= A_x + \frac{l_{\text{I}, \text{II}}}{l_{\text{III}, \text{II}}} m_{\text{II}} r_{\text{II}} \cos \theta_{\text{II}} \end{aligned}$$

y 方向:

$$\begin{aligned}
 & F'_{1\text{II}} + F'_{2\text{II}} \sin \alpha_2 - F'_{3\text{II}} \sin \alpha_3 + m'_{\text{II}} r'_{\text{II}} \sin \theta'_{\text{II}} = 0 \\
 m'_{\text{II}} r'_{\text{II}} \sin \theta'_{\text{II}} &= -F'_{1\text{II}} - F'_{2\text{II}} \sin \alpha_2 + F'_{3\text{II}} \sin \alpha_3 \\
 &= -\left(m_1 r_1 \frac{l_{\text{III},\text{II}} - l_{\text{I},\text{II}}}{l_{\text{III},\text{II}}} + F_{1\text{II}} \frac{l_{\text{I},\text{II}}}{l_{\text{III},\text{II}}}\right) - \left(m_2 r_2 \frac{l_{\text{III},\text{II}} - l_{\text{I},\text{II}}}{l_{\text{III},\text{II}}} + F_{2\text{II}} \frac{l_{\text{I},\text{II}}}{l_{\text{III},\text{II}}}\right) \sin \alpha_2 + \\
 &\quad \left(m_3 r_3 \frac{l_{\text{III},\text{II}} - l_{\text{I},\text{II}}}{l_{\text{III},\text{II}}} + F_{3\text{II}} \frac{l_{\text{I},\text{II}}}{l_{\text{III},\text{II}}}\right) \sin \alpha_3 \\
 &= \left(-m_1 r_1 \frac{l_{\text{III},\text{II}} - l_{\text{I},\text{II}}}{l_{\text{III},\text{II}}} - m_2 r_2 \frac{l_{\text{III},\text{II}} - l_{\text{I},\text{II}}}{l_{\text{III},\text{II}}} \sin \alpha_2 + m_3 r_3 \frac{l_{\text{III},\text{II}} - l_{\text{I},\text{II}}}{l_{\text{III},\text{II}}} \sin \alpha_3\right) + \\
 &\quad \left(-F_{1\text{II}} \frac{l_{\text{I},\text{II}}}{l_{\text{III},\text{II}}} - F_{2\text{II}} \frac{l_{\text{I},\text{II}}}{l_{\text{III},\text{II}}} \sin \alpha_2 + F_{3\text{II}} \frac{l_{\text{I},\text{II}}}{l_{\text{III},\text{II}}} \sin \alpha_3\right) \\
 &= \left(-m_1 r_1 \frac{l_{\text{III},\text{II}} - l_{\text{I},\text{II}}}{l_{\text{III},\text{II}}} - m_2 r_2 \frac{l_{\text{III},\text{II}} - l_{\text{I},\text{II}}}{l_{\text{III},\text{II}}} \sin \alpha_2 + m_3 r_3 \frac{l_{\text{III},\text{II}} - l_{\text{I},\text{II}}}{l_{\text{III},\text{II}}} \sin \alpha_3\right) + \\
 &\quad \frac{l_{\text{I},\text{II}}}{l_{\text{III},\text{II}}} m_{\text{II}} r_{\text{II}} \sin \theta_{\text{II}} \\
 &= A_y + \frac{l_{\text{I},\text{II}}}{l_{\text{III},\text{II}}} m_{\text{II}} r_{\text{II}} \sin \theta_{\text{II}}
 \end{aligned}$$

应加的平衡质径积为

$$\begin{aligned}
 m'_{\text{II}} r'_{\text{II}} &= \sqrt{\left(A_x + \frac{l_{\text{I},\text{II}}}{l_{\text{III},\text{II}}} m_{\text{II}} r_{\text{II}} \cos \theta_{\text{II}}\right)^2 + \left(A_y + \frac{l_{\text{I},\text{II}}}{l_{\text{III},\text{II}}} m_{\text{II}} r_{\text{II}} \sin \theta_{\text{II}}\right)^2} \\
 \sin \theta'_{\text{II}} &= \frac{A_y + \frac{l_{\text{I},\text{II}}}{l_{\text{III},\text{II}}} m_{\text{II}} r_{\text{II}} \sin \theta_{\text{II}}}{m'_{\text{II}} r'_{\text{II}}} \neq \sin \theta_{\text{II}} \\
 \cos \theta'_{\text{II}} &= \frac{A_x + \frac{l_{\text{I},\text{II}}}{l_{\text{III},\text{II}}} m_{\text{II}} r_{\text{II}} \cos \theta_{\text{II}}}{m'_{\text{II}} r'_{\text{II}}} \neq \cos \theta_{\text{II}}
 \end{aligned}$$

平衡基面 II 上的平衡质径积的大小发生了变化,方位角也发生了变化。

习题 11-10 图 11-19 所示四杆机构中, $\overline{AB} = 50 \text{ mm}$, $\overline{BC} = 200 \text{ mm}$, $\overline{CD} = 150 \text{ mm}$, $\overline{AD} = 250 \text{ mm}$, $\overline{AS}_1 = 20 \text{ mm}$, $\overline{BE} = 100 \text{ mm}$, $\overline{ES}_2 = 40 \text{ mm}$, $\overline{CF} = 50 \text{ mm}$, $\overline{FS}_3 = 30 \text{ mm}$; $m_1 = 1 \text{ kg}$, $m_2 = 2 \text{ kg}$, $m_3 = 30 \text{ kg}$ 。试在 AB 、 CD 杆上加平衡质量,实现机构

惯性力的完全平衡。

【解题思路及技巧】

运用“广义质量代换”的方法求解。

【解题过程】

(1) 求构件 1 的代换质量

$$\tilde{m}_{A1} = m_1 \frac{\overline{AB} - \overline{AS_1}}{\overline{AB}} = 1 \times \frac{50-20}{50} \text{ kg} = 0.6 \text{ kg}$$

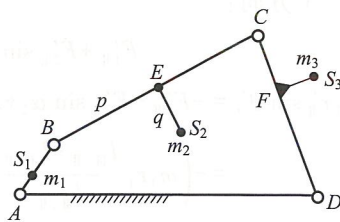


图 11-19

$$\tilde{m}_{B1} = m_1 \frac{\overline{AS_1}}{\overline{AB}} = 1 \times \frac{20}{50} \text{ kg} = 0.4 \text{ kg}$$

(2) 求构件 2 的代换质量

$$\tilde{m}_{B2} = m_2 \left(\frac{\overline{BC} - \overline{BE}}{\overline{BC}} - \frac{\overline{ES_2}}{\overline{BC}} i \right) = 2 \times \left(\frac{200-100}{200} - \frac{40}{200} i \right) = 1+0.4i$$

$$\tilde{m}_{C2} = m_2 \left(\frac{\overline{BE}}{\overline{BC}} + \frac{\overline{ES_2}}{\overline{BC}} i \right) = 2 \times \left(\frac{100}{200} + \frac{40}{200} i \right) = 1-0.4i$$

(3) 求构件 3 的代换质量

$$\tilde{m}_{S3} = m_3 \left(\frac{\overline{CD} - \overline{CF}}{\overline{CD}} - \frac{\overline{FS_3}}{\overline{CD}} i \right) = 30 \times \left(\frac{150-50}{150} - \frac{30}{150} i \right) = 20-6i$$

$$\tilde{m}_{D3} = m_3 \left(\frac{\overline{CF}}{\overline{CD}} + \frac{\overline{FS_3}}{\overline{CD}} i \right) = 30 \times \left(\frac{50}{150} + \frac{30}{150} i \right) = 10+6i$$

机构在 A、B、C、D 4 个代换点的代换质量为

$$\tilde{m}_A = \tilde{m}_{A1} = 0.6 \text{ kg}$$

$$\tilde{m}_B = \tilde{m}_{B1} + \tilde{m}_{B2} = (0.4+1+0.4i) \text{ kg} = (1.4+0.4i) \text{ kg}$$

$$\tilde{m}_C = \tilde{m}_{C2} + \tilde{m}_{S3} = (1-0.4i+20-6i) \text{ kg} = (21-6.4i) \text{ kg}$$

$$\tilde{m}_D = \tilde{m}_{D3} = (10+6i) \text{ kg}$$

A、D 两点的代换质量 $\tilde{m}_A$ 、 $\tilde{m}_D$ 不会引起机构质心的变化,在构件 1 和构件 3 上加平衡质量是为了平衡代换质量 $\tilde{m}_B$ 和 $\tilde{m}_C$ 。设加在构件 1 上的平衡质量为

m_{e1} , 其向径为 $\mathbf{r}_{e1}$; 加在构件 3 上的平衡质量为 m_{e3} , 其向径为 $\mathbf{r}_{e3}$, 则对于构件 1:

$$m_{e1}\mathbf{r}_{e1} + \tilde{m}_B\mathbf{r}_B = 0$$

而

$$m_{e1}\mathbf{r}_{e1} = m_{e1}\frac{r_{e1}}{r_B}(\cos\psi_1 + i\sin\psi_1)\mathbf{r}_B = \tilde{m}_{e1}\mathbf{r}_B$$

其中

$$\tilde{m}_{e1} = m_{e1}\frac{r_{e1}}{r_B}(\cos\psi_1 + i\sin\psi_1)$$

于是有

$$\tilde{m}_{e1} + \tilde{m}_B = 0$$

这也就是说

$$m_{e1}\frac{r_{e1}}{r_B}\cos\psi_1 + 1.4 = 0$$

$$m_{e1}\frac{r_{e1}}{r_B}\sin\psi_1 + 0.4 = 0$$

因此

$$\tan\psi_1 = \frac{-0.4}{-1.4} = 0.28517$$

$$\psi_1 = 164.0546^\circ$$

$$m_{e1}r_{e1} = \sqrt{1.4^2 + 0.4^2}r_B = 1.456r_B$$

由于 $\mathbf{r}_B$ 是自点 A 到点 B 的向量, 因此该向量的模为

$$r_B = \overline{AB} = 50 \text{ mm}$$

设

$$r_{e1} = 50 \text{ mm}$$

则加在构件 1 上的平衡质量为

$$m_{e1} = \frac{1.456r_B}{r_{e1}} = \frac{1.456 \times 50}{50} \text{ kg} = 1.456 \text{ kg}$$

对于构件 3

$$m_{e3}\mathbf{r}_{e3} + \tilde{m}_C\mathbf{r}_C = 0$$

而

$$m_{e3} \mathbf{r}_{e3} = m_{e3} \frac{r_{e3}}{r_c} (\cos \psi_3 + i \sin \psi_3) \mathbf{r}_c = \tilde{m}_{e3} \mathbf{r}_c$$

其中

$$\tilde{m}_{e3} = m_{e3} \frac{r_{e3}}{r_c} (\cos \psi_3 + i \sin \psi_3)$$

于是有

$$\tilde{m}_{e3} + \tilde{m}_c = 0$$

这也就是说

$$m_{e3} \frac{r_{e3}}{r_c} \cos \psi_3 + 21 = 0$$

$$m_{e3} \frac{r_{e3}}{r_c} \sin \psi_3 - 6.4 = 0$$

因此

$$\tan \psi_3 = \frac{6.4}{-21} = -0.30476$$

$$\psi_3 = 163.0508^\circ$$

$$m_{e3} r_{e3} = \sqrt{21^2 + 6.4^2} r_c = 21.9536 r_c$$

由于 r_c 是自点 D 到点 C 的向量, 因此该向量的模为

$$r_c = \overline{CD} = 150 \text{ mm}$$

设

$$r_{e3} = 50 \text{ mm}$$

则加在构件 3 上的平衡质量为

$$m_{e3} = \frac{21.9536 r_c}{r_{e3}} = \frac{21.9536 \times 150}{50} \text{ kg} = 65.86 \text{ kg}$$

构件 1 和构件 3 上的平衡质量的安装位置如图 11-20 所示。

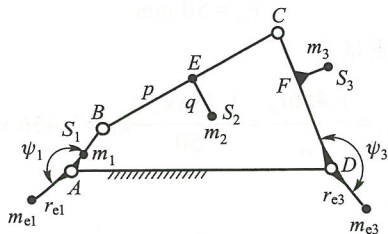


图 11-20

习题 11-11 如图 11-21 所示曲柄滑块机构中各构件尺寸为 $l_{AB} = 50 \text{ mm}$, $l_{BC} = 200 \text{ mm}$ 。滑块 C 的质量为 $20 \sim 1\,000 \text{ kg}$, 且忽略曲柄 AB 及连杆 BC 的质量。试问:

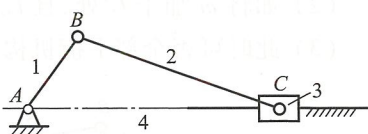


图 11-21

(1) 如曲柄 AB 处于低转速状态下工作, 且 C 处质量较小时, 应如何考虑平衡措施?

(2) 如曲柄 AB 处于较高转速状态下工作, 且 C 处质量较大时, 又应如何考虑平衡措施?

(3) 质量与速度二者之间何者对惯性力的产生起主要作用? 为什么?

(4) 有没有办法使此机构达到完全平衡?

【解题思路及技巧】

运用机构平衡的概念及方法。

【解题过程】

(1) 当曲柄 AB 处于低转速状态下工作, 且 C 处质量较小时, 应考虑采取在曲柄上加平衡质量的平衡措施。

(2) 当曲柄 AB 处于较高转速状态下工作, 且 C 处质量较大时, 应考虑采用机构对称平衡措施。

(3) 质量与速度二者之间对惯性力的产生起主要作用的是速度。从理论上讲, 惯性力是由质量和加速度共同作用而产生的:

$$F = -ma$$

在本题中, 滑块 C 的加速度为

$$a_c = \left[\frac{l_{AB}^4 (\sin^2 \varphi_1 - \cos^2 \varphi_1) \sin \varphi_1 \cos \varphi_1}{\sqrt{(l_{BC}^2 - l_{AB}^2 \sin^2 \varphi_1)^3}} - l_{AB} \cos \varphi_1 \right] \omega_1^2$$

式中: φ_1 为曲柄 AB 的转角; ω_1 为曲柄 AB 的角速度。

由上式可以看出, 滑块的加速度与曲柄角速度的平方成正比, 很显然, 曲柄角速度的变化对滑块加速度的影响是很大的, 从而影响惯性力。因此, 可以看出对惯性力的产生起主要作用的是速度。

(4) 使此机构达到完全平衡的方法就是采用机构对称平衡。

习题 11-12 在图 11-22 所示的曲柄滑块机构中, S_1 、 S_2 和 S_3 为曲柄、连杆和滑块的质心。已知各构件的尺寸和质量如下: $l_{AB} = 100 \text{ mm}$, $l_{BC} = 500 \text{ mm}$, $l_{AS_1} = 70 \text{ mm}$, $l_{BS_2} = 200 \text{ mm}$, $m_1 = 10 \text{ kg}$, $m_2 = 50 \text{ kg}$, $m_3 = 120 \text{ kg}$ 。欲在曲柄 AB 上加一平衡质量 m 来平衡该机构的惯性力, 问:

(1) m 应加于曲柄 AB 的什么方向上?

(2) 如将 m 加于 C' 处, 且 $l_{AC'} = 100 \text{ mm}$, m 为多少?

(3) 此时可否全部平衡机构的惯性力?

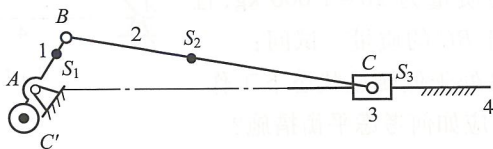


图 11-22

【解题思路及技巧】

运用质量代换的方法求解。

【解题过程】

(1) m 应加于曲柄 AB 上与点 B 相反的方向上, 因为这样才能平衡点 B 处的代换质量。

(2) 构件 2 的代换质量

$$m_{B2} = \frac{l_{BC} - l_{BS_2}}{l_{BC}} m_2 = \frac{500 - 200}{500} \times 50 \text{ kg} = 30 \text{ kg}$$

$$m_{C2} = \frac{l_{BS_2}}{l_{BC}} m_2 = \frac{200}{500} \times 50 \text{ kg} = 20 \text{ kg}$$

构件 1 的代换质量

$$m_{A1} = \frac{l_{AB} - l_{AS_1}}{l_{AB}} m_1 = \frac{100 - 70}{100} \times 10 \text{ kg} = 3 \text{ kg}$$

$$m_{B1} = \frac{l_{AS_1}}{l_{AB}} m_1 = \frac{70}{100} \times 10 \text{ kg} = 7 \text{ kg}$$

机构在 A 、 B 、 C 3 个代换点的代换质量为

$$m_A = m_{A1} = 3 \text{ kg}$$

$$m_B = m_{B1} + m_{B2} = 7 \text{ kg} + 30 \text{ kg} = 37 \text{ kg}$$

$$m_C = m_{C2} + m_3 = 20 \text{ kg} + 120 \text{ kg} = 140 \text{ kg}$$

为了平衡代换点 B 的代换质量 m_B , 加于 C' 处的平衡质量为

$$m' = \frac{m_B l_{AB}}{l_{AC'}} = \frac{37 \times 100}{100} \text{ kg} = 37 \text{ kg}$$

为了部分平衡代换点 C 的替代质量 m_C , 加于 C' 处的平衡质量为

$$m'' = \frac{1}{2} \frac{m_c l_{AB}}{l_{AC'}} = \frac{1}{2} \times \frac{140 \times 100}{100} \text{ kg} = 70 \text{ kg}$$

加于 C'' 处的总的平衡质量为

$$m = m' + m'' = 37 \text{ kg} + 70 \text{ kg} = 107 \text{ kg}$$

(3) 此时不能全部平衡机构的惯性力。

参考文献

- [1] 于红英,邓宗全,丁刚.机械原理[M].4版.北京:高等教育出版社,2023.
- [2] 陈明,刘福利,于红英.机械原理学习指导与习题解答[M].北京:高等教育出版社,2016.
- [3] 王知行,李瑰贤.机械原理电算程序设计[M].哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,1993.
- [4] 焦映厚.机械原理试题精选与答题技巧[M].6版.哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2015.
- [5] 郭维林,刘东星.机械原理(第七版)同步辅导及习题全解[M].北京:中国水利水电出版社,2009.
- [6] 陆品,秦彦斌.机械原理导教、导学、导考[M].6版.西安:西北工业大学出版社,2004.
- [7] 邹慧君.机械原理习题集[M].北京:高等教育出版社,1985.
- [8] 申永胜.机械原理辅导与习题[M].2版.北京:清华大学出版社,2011.
- [9] 李瑞琴.机械原理同步辅导与习题全解[M].北京:电子工业出版社,2011.
- [10] 王继荣,师忠秀.机械原理习题集及学习指导[M].2版.北京:机械工业出版社,2012.
- [11] 翟敬梅,邹焱飏.机械原理学习及解题指导[M].北京:中国轻工业出版社,2011.

郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》,其为人将承担相应的民事责任和行政责任;构成犯罪的,将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序,保护读者的合法权益,避免读者误用盗版书造成不良后果,我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人进行严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为,希望及时举报,我社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话 (010)58581999 58582371

反盗版举报邮箱 dd@hep.com.cn

通信地址 北京市西城区德外大街4号

高等教育出版社知识产权与法律事务部

邮政编码 100120

ISBN 978-7-04-062756-5



9 787040 627565 >

定价 35.00 元